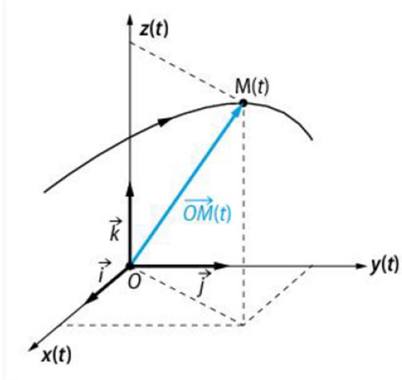
Mouvement et deuxième loi de Newton

Décrire un mouvement

Le vecteur position

La description du mouvement d'un point M consiste à connaitre à chaque instant les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de ce point dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$:



Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ fournit toutes ces information grâce à ses coordonnées. En effet, les composantes du vecteur position à l'instant t sont les coordonnées du point M :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Chaque coordonnée $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ peut être considérée comme une fonction de la variable t, tout comme en mathématique il existe des fonctions f(x), g(x) et h(x).
- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ dépend de l'instant t, il peut être lui aussi considéré comme une fonction que l'on appellera fonction vectorielle.

Dérivée du vecteur position

Dérivée d'une fonction

En mathématique, la fonction $f'(x)$, dérivée de la fonction $f(x)$, est définie par le calcul de limite suivant :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le taux d'accroissement de la fonction f a pour expression :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dérivée du vecteur position

Avant de calculer la dérivée du vecteur position, on va exprimer le taux d'accroissement du vecteur position, en reprenant la définition mathématique. On utilise le tableau de correspondance suivant :

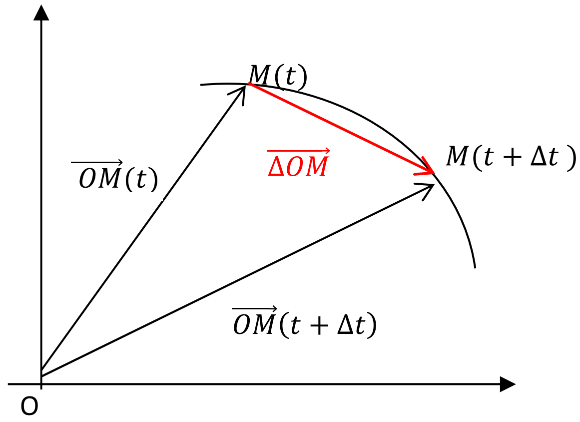
Math.	Physique
x	t
h	Δt

D'où :

$$\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Regardons, sur le graphique ci-dessous, ce que représente la soustraction des deux vecteurs au numérateur du taux d'accroissement.

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t}}$$



La norme du vecteur $\|\overrightarrow{\Delta OM}\|$ représente la distance parcourue par le point M entre les instants t et $t+\Delta t$.

Ainsi, $\left\|\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t}\right\|$ est l'expression approchée de la vitesse moyenne du point M entre les instants t et $t+\Delta t$:

$$v_{moyenne}=\left\|\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t}\right\|$$

Lorsque la valeur de Δt diminue et tend vers 0, alors la direction du vecteur $\overrightarrow{\Delta OM}$ se rapproche de la droite tangente à la trajectoire au point M et finit par se confondre avec elle.

Lorsque la valeur de Δt diminue et tend vers 0, la valeur de la vitesse moyenne, $\left\|\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t}\right\|$, finie par être égale à la vitesse instantanée au point M(t).

On peut donc conclure que :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t)-\overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}=\vec{v}(t)$$

C'est-à-dire :

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ à l'instant t sont :

$$\vec{v}(t)=v_x(t)\,\vec{\imath}+v_y(t)\,\vec{\jmath}+v_z(t)\,\vec{k}=\begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\\v_z(t)\end{pmatrix}$$

D'après l'expression précédente définissant le vecteur vitesse, on en déduit que :

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

$$v_z(t)=\frac{dz(t)}{dt}$$

La norme du vecteur vitesse est définie par :

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}$$

Dérivée du vecteur vitesse et vecteur accélération

Le vecteur accélération exprime la variation du vecteur vitesse par unité de temps. Comme pour l'exemple précédent, on peut montrer que le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Dans le repère $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,; \vec{k})$, les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ à l'instant t sont :

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} + a_y(t)\,\vec{\jmath} + a_z(t)\,\vec{k} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

De l'expression précédente, on en déduit les coordonnées du vecteur accélération :

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ représente la dérivée seconde de la fonction $x(t)$

La norme du vecteur accélération est :

$$\|\,\vec{a}\,\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

Le repère de Frenet

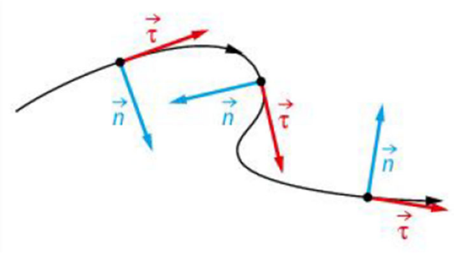
Définition

Le repère de Frenet est défini par deux vecteur orthogonaux $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ de norme 1, comme les vecteurs $(\,\vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,; \vec{k})$ du repère cartésien.

Ces vecteurs ont la particularité de se définir en chaque point de la trajectoire :

- Le vecteur $\vec{\tau}$ est tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement ;
- Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{\tau}$ et dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

On dit que le repère de Frenet est local car il dépend du point de la courbe.



Cas particulier du mouvement circulaire de rayon R

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, les vecteurs vitesse et accélération se décomposent dans le repère de Frenet de la façon suivante :

- Le vecteur vitesse est colinéaire au vecteur $\vec{\tau}$. Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, il ne peut donc pas avoir de composante selon $\vec{n}$:

$$\vec{v}(t) = v\vec{\tau}$$

V est la norme du vecteur vitesse.

- Le vecteur accélération a pour expression :

$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

Attention : v représente la norme du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$

Etude de mouvement

Mouvement rectiligne

Un mouvement est rectiligne si la trajectoire est représentée par une droite.

Dans ce cas le vecteur vitesse et accélération gardent la même direction, celle de la droite.

Pour simplifier l'écriture des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération, on choisira un repère cartésien $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$ dont un des axes (Ox) (par exemple) est confondu avec la trajectoire.

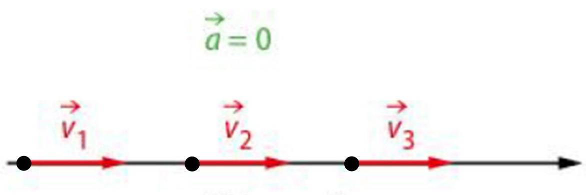
Les expressions des vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + 0\,\vec{k} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où : $\vec{v}(t) = v_x(t)$ et $\vec{a}(t) = a_x(t)$ pour un mouvement rectiligne quelconque sur un axe (Ox).

Parmi les mouvements rectilignes, il existe trois cas particuliers :

Mouvement rectiligne uniforme



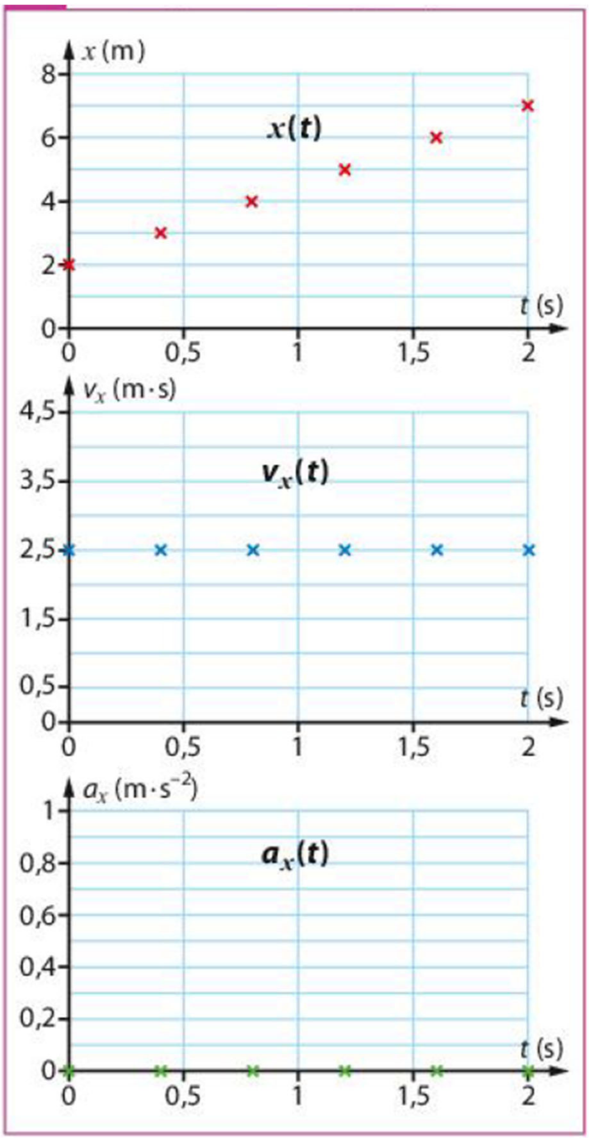
Pour ce mouvement, les positions prises par le point M aux différents instants successifs t_1, t_2, t_3… sont équidistantes. Les positions du point M ont été relevées à des intervalles de temps égaux.

Le vecteur vitesse est donc constant : $\vec{v}(t) = \overrightarrow{constante}$

Quant au vecteur accélération, il est égal au vecteur nul puisque par définition : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

Donc : $\vec{a} = \vec{0}$

Représentations graphiques :



Les valeurs des abscisses du point M, relevées aux différents instants t, peuvent être modélisées par une fonction affine :

$$x(t) = v.t + b$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\vec{\imath} = \overrightarrow{constante}$$

On en déduit : $v_x(t) = constante = v$

Comme : $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v$

On retrouve alors :

On sait que : $v_x(t) = constante = v$

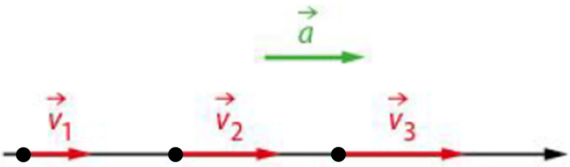
Comme : $\vec{a}(t) = a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$

On retrouve bien :

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Dans ce cas le vecteur accélération est constant : $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} = \overrightarrow{constante}$



rectiligne uniformément accéléré

On observe que les positions prises par le point M sur l'axe (Ox) sont de plus en plus espacées.

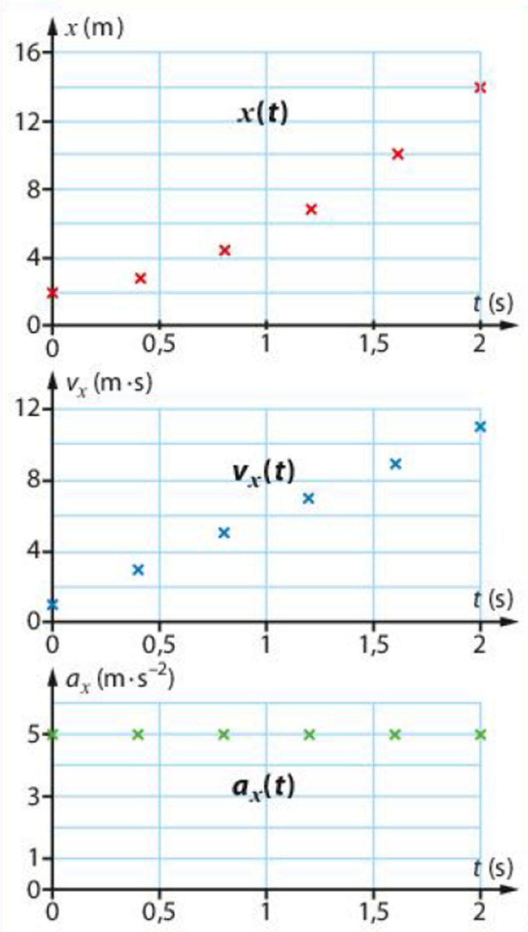
La vitesse n'est donc pas constante.

De la relation : $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} = \overrightarrow{constante}$, on en déduit que : $a_x(t) = a = valeur\ constante.$

Par définition : $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$, on en déduit que : $\frac{dv_x(t)}{dt} = a$ et donc que : $v_x(t) = a.t + v_0$ car la dérivée d'une fonction affine est une constante. La constante v_0 représente la valeur de la vitesse à la date t =0.

Par définition : $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, on en déduit que : $\frac{dx(t)}{dt} = a.t + b$ et donc que : $x(t) = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$

Représentations graphiques :



Les valeurs prises par l'abscisse du point M pour les différents instants t peuvent bien être modélisées par une fonction parabolique comme on l'a vu précédemment :

$$x(t) = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$$

Les différentes valeurs prises par la vitesse sont alignées sur une droite. Par conséquent elles peuvent être modélisées par une fonction affine du temps :

$$v_x(t) = a.t + v_0$$

L'accélération est bien constante !

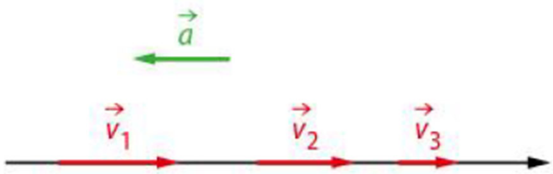
Il s'agit de l'hypothèse de départ.

$$a_x(t) = a = valeur\ constante$$

Mouvement rectiligne uniformément ralenti

Dans ce cas le vecteur accélération est constant : $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} = \overrightarrow{constante}$, mais SURPRISE :

Le vecteur accélération et le vecteur vitesse sont de sens opposés.



rectiligne uniformément ralenti

En effet, $\vec{a} = \frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}$, et comme la norme du vecteur vitesse $\vec{v_2}$ est plus petite que celle du vecteur $\vec{v_1}$ (mouvement ralenti), le vecteur accélération sera alors de sens contraire.

On a toujours : le vecteur accélération est constant : $\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{\imath} = \overrightarrow{constante}$ mais avec la particularité d'avoir cette fois-ci : $a_x(t) = a = valeur\ constante < 0$

Pour les équations horaires cela ne change rien et on a toujours :

$$x(t) = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_0.t + x_0$$

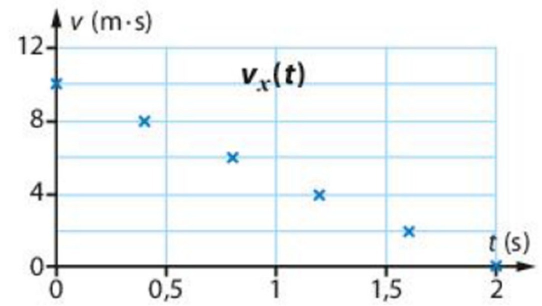
$$v_x(t) = a.t + v_0$$

$$a_x(t) = a = valeur\ constante\ négative$$

Représentations graphiques :

- Pour la fonction $x(t)$, on aura toujours une représentation parabolique, mais la parabole sera tournée vers le bas.

- Pour la fonction $v_x(t)$, on aura toujours une fonction affine mais avec une pente négative :

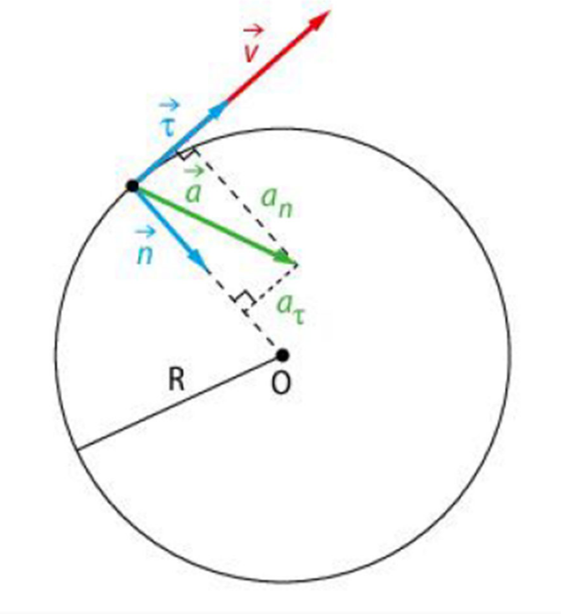


Mouvement circulaire

Dans un mouvement circulaire la trajectoire est représentée par un cercle. L'étude de ce mouvement est plus simple en utilisant le repère de Frenet.

Dans le cas d'un mouvement circulaire avec une vitesse qui a une valeur qui varie, on a :

La vitesse augmente-t-elle, ou diminue-t-elle ?



Lorsque la valeur de la vitesse est constante, le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = v\vec{\tau}$ change de direction mais sa norme est toujours la même : $v = constante$

Conséquences sur le vecteur accélération :

Par définition,

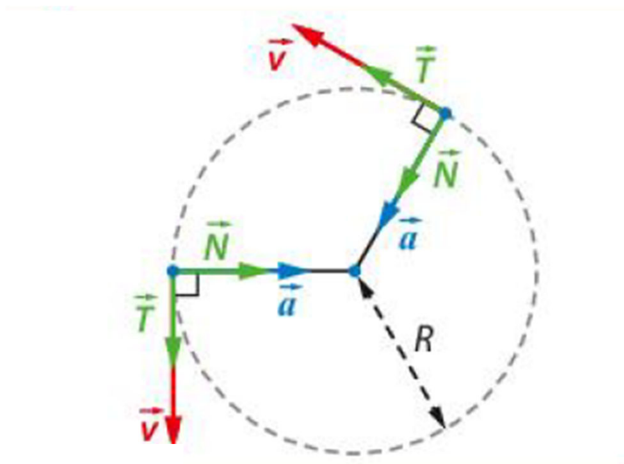
$$\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

Puisque $v = constante$ alors : $\frac{dv}{dt} = 0$ et $a_\tau = 0$

Conclusion : Pour un mouvement circulaire uniforme, la valeur de l'accélération est constante et vaut v^2/R. De plus, le vecteur accélération est toujours dirigé vers le centre du cercle.

Représentation des vecteurs vitesse et accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme :



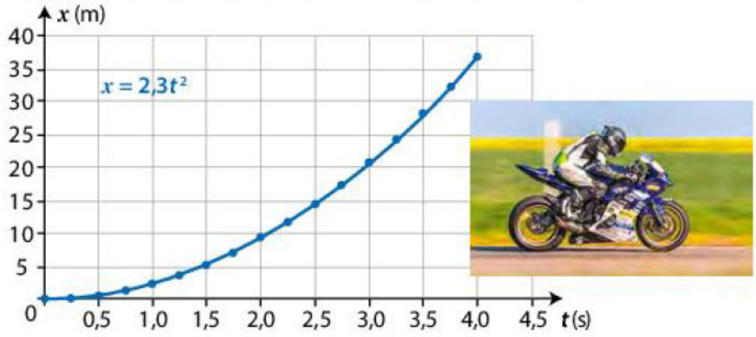
Sur le dessin $\vec{\tau} = \vec{T}$ et $\vec{n} = \vec{N}$

Exercices

Exercice 1 : QCM

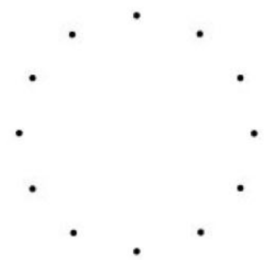
A

Un motard effectue un essai sur une piste rectiligne. M est un point du système {moto et motard} d'abscisse x.



B

On a représenté les positions à intervalles de temps réguliers d'un point P pris sur le plateau horizontal d'un manège en mouvement de rotation autour d'un axe vertical.



1 Les vecteurs position, vitesse et accélération

	A	B	C
1. Dans la situation **A**, la distance parcourue par la moto 3 s après le départ est :	$d = 20{,}7$ m	$d = 6{,}9$ m	$d = 10{,}4$ m
2. Dans la situation **A**, la vitesse de la moto est donnée par la relation :	$v(t) = 2{,}3t$	$v(t) = 4{,}6t$	$v(t) = 4{,}6t + 2{,}3$
3. Dans la situation **B**, le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point P :	est un vecteur constant.	a une valeur constante.	varie au cours du temps.
4. D'après la situation **B**, le vecteur accélération $\vec{a}$ du point P :	est dirigé vers le centre de la trajectoire.	a une valeur égale à $\frac{dv}{dt}$.	a une valeur égale à $\frac{v^2}{R}$, avec R le rayon du cercle.

2 Des exemples de mouvements

	A	B	C
5. Dans la situation **A**, le mouvement du point M du système est :	rectiligne uniforme.	rectiligne uniformément accéléré.	curviligne accéléré.
6. Dans la situation **B**, le mouvement du point P du système est circulaire :	uniforme.	uniformément accéléré.	uniformément retardé.

3 La deuxième loi de Newton

	A	B	C
7. Le centre de masse G d'un système :	est un point quelconque choisi d'un système.	est le seul point de ce système où peut toujours s'appliquer le principe d'inertie.	a en général un mouvement plus simple que les autres points du système.
8. La deuxième loi de Newton est donnée par la relation :	$\Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}$	$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G$	$\Sigma F = m \times a_G$
9. Dans la situation **B**, la somme des forces appliquées au point P est :	colinéaire et de même sens que le vecteur accélération.	perpendiculaire et de même sens que le vecteur accélération.	dirigée vers le centre de la trajectoire.

Exercice 2 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur vitesse

Les coordonnées du vecteur position d'un point matériel M dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ lié au référentiel d'étude sont données ci-dessous :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = -a \times t + b \\ y = 0 \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse de M.

Exercice 3 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur accélération

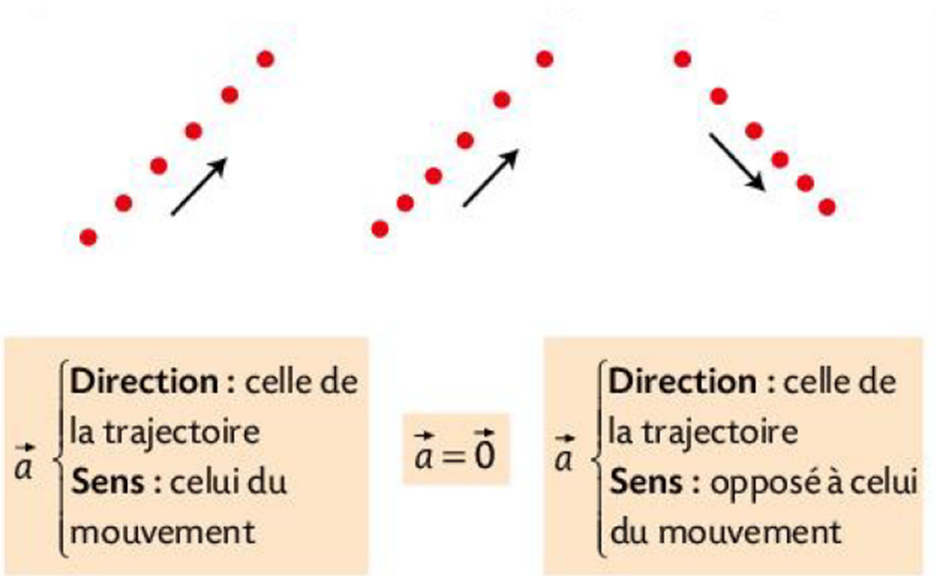
Une bille assimilée à un point B est lancée verticalement à un instant t = 0 s. Ses positions sont repérées dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ lié à un référentiel terrestre par :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 0 \\ y = -4{,}9t^2 + 4{,}0t + 1{,}5 \end{cases}$$

Etablir les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse puis de vecteur accélération.

Exercice 4 : Exploiter les caractéristiques du vecteur accélération

Des mouvements d'un point matériel dans un référentiel terrestre sont étudiés ci-dessous :



Relier chacun des pointages suivants aux caractéristiques du vecteur accélération qui lui correspondent.

Exercice 5 : Mathématiques

On dispose de la fonction f définie pour tout x par : f(x) = $10x^2 - 8x + 5$

1. Exprimer la dérivée f' de f sous la forme différentielle (phys.) et donner son expression.
2. Calculer le nombre dérivé en 1.
3. Exprimer la dérivée seconde f'' de f sous la forme différentielle (phys.) et donner son expression.
4.

Exercice 6 : Physique

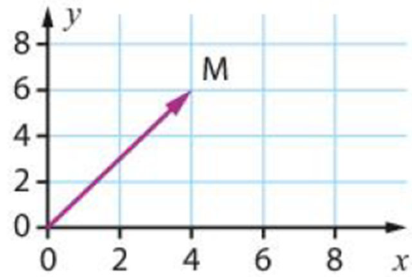
L'équation horaire, en unité SI, du mouvement d'un point mobile qui se déplace suivant l'axe (Ox) est :

$$x(t) = 10\, t^2 - 8\, t + 5$$

1. Exprimer la coordonnée v_x du vecteur vitesse de ce point mobile.
2. Calculer la valeur de la vitesse à la date t = 1 s.
3. Exprimer la coordonnée a_x du vecteur accélération du point mobile.

Exercice 7 : Utilisation du vecteur position

Dans le plan (O ; x, y), le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ d'une voiture, à la date t, est représenté ci-dessous :

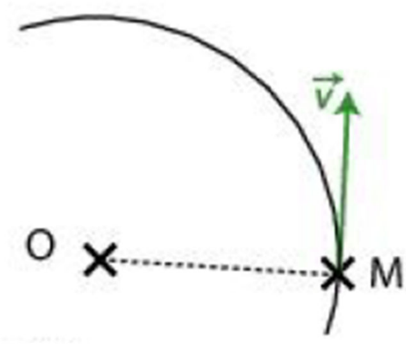


Ses équations horaires sont :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t \\ y(t) = 2t - 2 \end{cases}$$

Déterminer la date t.

Exercice 8 : Etudier un mouvement circulaire



Un point matériel M décrit un mouvement circulaire uniforme autour d'un point O.

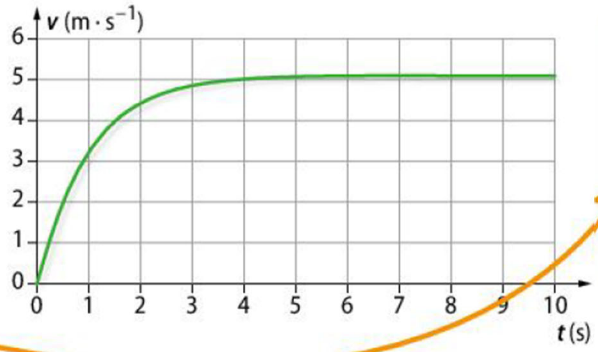
1. Représenter le repère de Frenet lié à M
2. Exprimer les coordonnées du vecteur accélération de M dans ce repère.

Exercice 9 : Mouvement circulaire

Le disque en pierre d'une meule est mis en rotation à l'aide d'un moteur électrique. On appelle $\vec{v}_M$ la vitesse d'un point M se trouvant sur la périphérie du disque.

Le diamètre du disque est $D = 40$ cm.

La représentation graphique de $\|\vec{v}_M\|$ est donnée ci-contre.



LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

- La dérivée d'une fonction est la **pente de la tangente** à sa représentation graphique.
- Le diamètre permet d'exprimer la **distance à l'axe de rotation** du point M. Il faut être vigilant sur les unités.

1. a. Décrire la trajectoire du point M.

b. Comment évoluent les composantes de $\vec{v}_M$ dans le repère de Frenet ?

2. a. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}_M$ dans le repère de Frenet.

b. À partir du graphique, **décrire qualitativement** l'évolution des composantes du vecteur accélération puis calculer la valeur de l'accélération à $t = 10$ s.

c. En déduire le type de mouvement du point étudié au cours du temps.

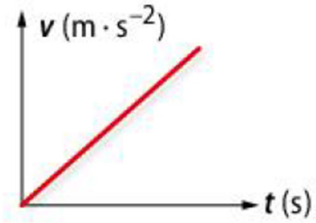
LES VERBES D'ACTION

- **Décrire :** ici il s'agit d'une trajectoire. Les mots-clés à utiliser sont : circulaire ou rectiligne uniquement
- **Décrire qualitativement :** donner les tendances sans fournir de valeur précise.
- **En déduire :** utiliser la réponse précédente pour répondre à celle-ci.

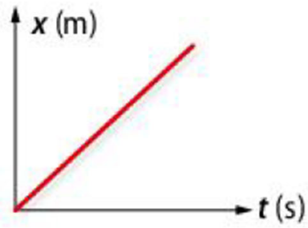
Exercice 10 : Différents mouvements

Trois mouvements rectilignes différents ont été étudiés. Des représentations graphiques temporelles des projections des vecteurs position, vitesse l'accélération pour ces mouvements sont proposées ci-dessous. Regrouper ces représentations graphiques de telle sorte que chaque groupe correspond à l'un des trois mouvement étudié.

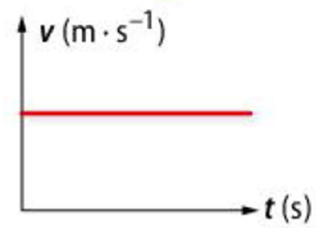
A



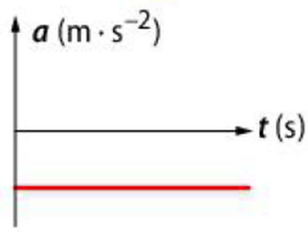
B



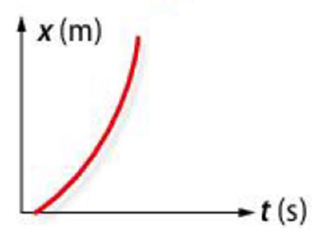
C



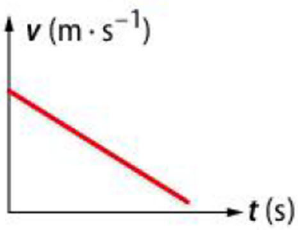
D



E



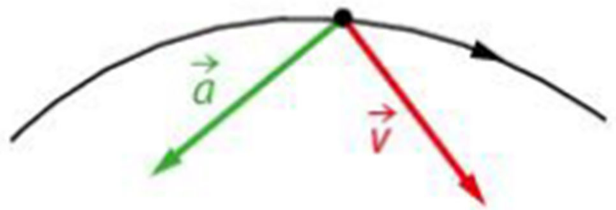
F



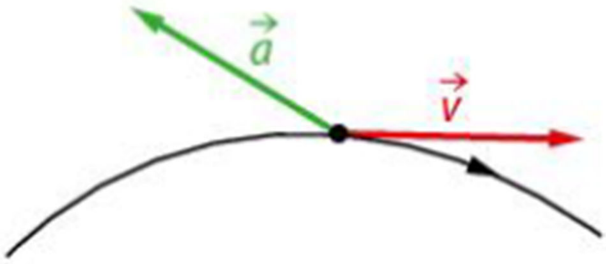
Exercice 11 : Mouvements impossibles

Ces représentations sont celles de trajectoires pour lesquelles un élève a associé en un point le vecteur vitesse et accélération pour traduire le mouvement. Certaines d'entre elles ne peuvent pas être correctes. Identifiez-les en justifiant.

A

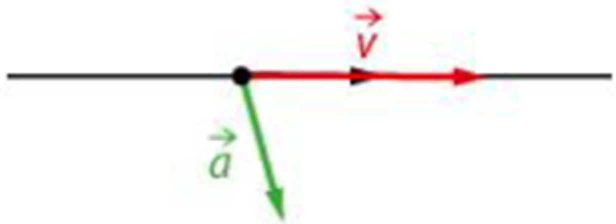


B

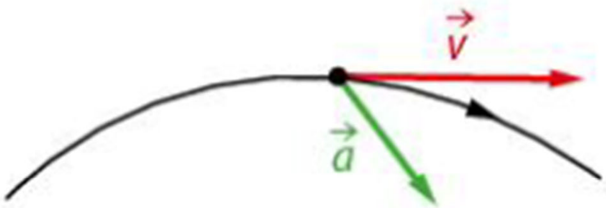


C

D



E



F

Exercice 12 : Vols spatiaux

Pour imaginer voyager dans l'espace, il faut atteindre des vitesses importantes. Imaginons un vaisseau capable d'accélérer à 5 g (5 fois l'accélération de la pesanteur terrestre, soit $a = 49{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

On imagine une navette ayant un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

1. On considère que la vitesse initiale est nulle. Vérifier que l'expression de la distance parcourue par la navette au bout d'un temps t est $d = \frac{1}{2}kt^2$ où k est une constante dont on donnera la valeur numérique.

2. Uranus, la 8^e^ planète de notre système solaire, est à une distance d'environ $2{,}9 \cdot 10^9$ km de la Terre.

a. **Déterminer** le temps nécessaire pour atteindre cette planète dans ces conditions.

b. Déterminer la vitesse atteinte par la navette au bout de cette durée.

3. Si on voulait simplement atteindre cette planète, il faudrait en réalité un mouvement uniformément accéléré jusqu'à mi-parcours puis un mouvement uniformément ralenti afin d'avoir une vitesse nulle à l'arrivée.

a. **Comparer les vecteurs** accélérations dans les deux phases du mouvement.

b. Quelle serait la durée du voyage ?

c. Quelle serait la vitesse maximale atteinte ?

LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

- La valeur de l'accélération est fournie
- Le type de mouvement est rectiligne à accélération constante.

LES VERBES D'ACTION

- **Vérifier :** à l'aide de l'expression fournie, retrouver une donnée de l'énoncé.
- **Déterminer :** trouver la valeur grâce à un calcul.
- **Comparer les vecteurs :** il faut comparer la norme, la direction et le sens des vecteurs.