Mouvement dans un champ uniforme

Des champs uniformes

Définitions

Un champ vectoriel uniforme est un champ qui garde, en tout point d'une région de l'espace, la même direction, le même sens et la même valeur.

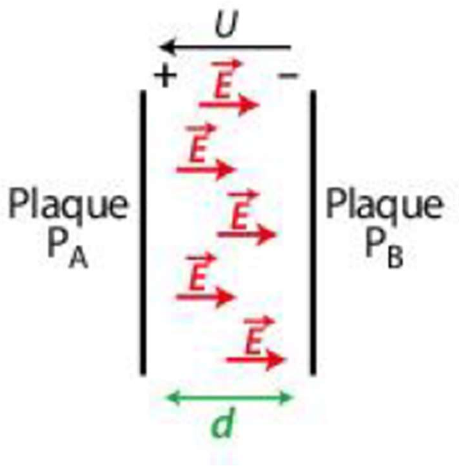
Exemples

Le champ de pesanteur

Dans une région de l'espace de faibles dimensions par rapport à la Terre, un champ de pesanteur $\vec{g}$ peut être considéré comme uniforme.

Le champ électrique

Un champ électrique $\vec{E}$ peut être crée entre les plaques d'un condensateur plan :



Lorsqu'on applique une tension électrique U entre les plaques d'un **condensateur plan**, elles se chargent électriquement. Il apparaît alors entre elles un **champ électrique $\vec{E}$ uniforme** dont les caractéristiques sont :
– direction : perpendiculaire aux plaques ;
– sens : de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement ;
– valeur : d'autant plus élevée que la valeur absolue de la tension U est grande et que la distance d entre les plaques est faible.

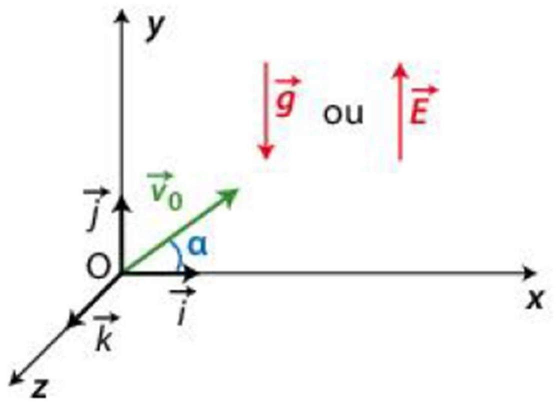
La valeur du champ $\vec{E}$ est donnée par la relation :

$$E = \frac{|U|}{d}$$

Mouvement dans un champ uniforme

Le système étudié est un point matériel ou le centre de masse M d'un corps. Son mouvement dans un champ uniforme vertical ($\vec{g}$ ou $\vec{E}$) est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen.

A la date $t = 0\ s$, le point M se trouve à l'origine du repère $(O;\ x;\ y;\ z)$.



› $\vec{g}$ est toujours vertical vers le bas ;
$\vec{E}$ est choisi ici vertical et vers le haut.

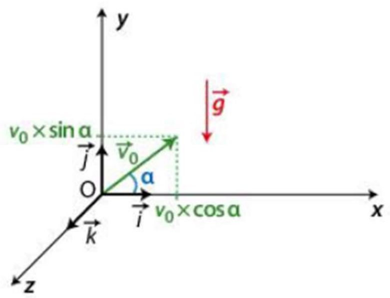
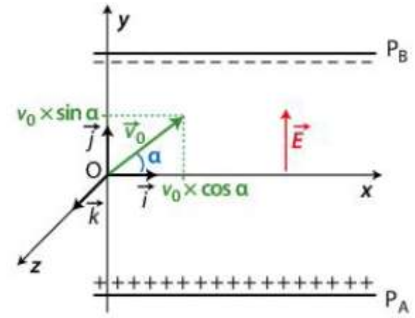
Détermination du vecteur accélération

Le vecteur accélération est obtenu par application de la deuxième loi de Newton.

Mouvement dans un champ de pesanteur	Mouvement dans un champ électrique
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ soit $m\vec{g} = m\vec{a}$ et ainsi $\vec{a} = \vec{g}$. Le vecteur accélération est vertical vers le bas. Le vecteur accélération a pour coordonnées cartésiennes : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases}$	$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ soit $q\vec{E} = m\vec{a}$ et ainsi $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$. Le vecteur accélération est vertical, de même sens que $\vec{E}$ si la charge q est positive, et de sens contraire sinon. Le vecteur accélération a pour coordonnées cartésiennes : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q \times E}{m} \\ a_z = 0 \end{cases}$

Détermination du vecteur vitesse

- Puisque le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, les coordonnées du vecteur vitesse sont obtenues en recherchant les **primitives par rapport au temps** des coordonnées du vecteur accélération.
- Les **constantes d'intégration** apparues dans les primitives sont déterminées à l'aide des **conditions initiales** : les coordonnées du vecteur **vitesse** à l'instant **initial**.

Mouvement dans un champ de pesanteur	Mouvement dans un champ électrique
$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{primitive}} \vec{v}\begin{cases} v_x = C_x \\ v_y = -g\times t + C_y \\ v_z = C_z \end{cases}$	$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{q\times E}{m} \\ a_z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{primitive}} \vec{v}\begin{cases} v_x = C_x \\ v_y = \dfrac{q\times E}{m}\times t + C_y \\ v_z = C_z \end{cases}$
Utilisation des coordonnées de $\vec{v}_0$:	Utilisation des coordonnées de $\vec{v}_0$:
 	
$\vec{v}_0\begin{cases} v_{x_0} = v_0\times\cos\alpha = C_x \\ v_{y_0} = v_0\times\sin\alpha = -g\times 0 + C_y \\ v_{z_0} = 0 = C_z \end{cases}$	$\vec{v}_0\begin{cases} v_{x_0} = v_0\times\cos\alpha = C_x \\ v_{y_0} = v_0\times\sin\alpha = \dfrac{q\times E}{m}\times 0 + C_y \\ v_{z_0} = 0 = C_z \end{cases}$
Il vient : $\begin{cases} C_x = v_0\times\cos\alpha \\ C_y = v_0\times\sin\alpha \\ C_z = 0 \end{cases}$	Il vient : $\begin{cases} C_x = v_0\times\cos\alpha \\ C_y = v_0\times\sin\alpha \\ C_z = 0 \end{cases}$
Les coordonnées du vecteur vitesse sont donc : $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\times\cos\alpha \\ v_y = -g\times t + v_0\times\sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases}$	Les coordonnées du vecteur vitesse sont donc : $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\times\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{q\times E}{m}\times t + v_0\times\sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases}$

Au cours du mouvement, la coordonnée v_z est constamment nulle. Le mouvement du système est donc dans le plan contenant le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

Détermination du vecteur position

- Puisque le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, les coordonnées du vecteur position sont obtenues en recherchant les **primitives par rapport au temps** des coordonnées du vecteur vitesse.
- Les **constantes d'intégration** apparues dans les primitives sont déterminées à l'aide des **conditions initiales** : les coordonnées du vecteur **position** à l'instant **initial**.

<table>
<tr><th>Mouvement dans un champ de pesanteur</th><th>Mouvement dans un champ électrique</th></tr>
<tr><td>

$\vec{v} \xrightarrow{\text{primitive}} \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t + D_x \\ y = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + D_y \\ z = D_z \end{cases}$

Utilisation des coordonnées de $\overrightarrow{OM}_0$:

$\overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 = v_0 \times \cos\alpha \times 0 + D_x \\ y_0 = 0 = -\dfrac{1}{2} g \times 0^2 + v_0 \times \sin\alpha \times 0 + D_y \\ z_0 = 0 = D_z \end{cases}$

Il vient : $\begin{cases} D_x = 0 \\ D_y = 0 \\ D_z = 0 \end{cases}$

Les coordonnées du vecteur position sont donc :

$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y = -\dfrac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \\ z = 0 \end{cases}$

</td><td>

$\vec{v} \xrightarrow{\text{primitive}} \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t + D_x \\ y = \dfrac{q \times E}{2m} \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t + D_y \\ z = D_z \end{cases}$

Utilisation des coordonnées de $\overrightarrow{OM}_0$:

$\overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 = v_0 \times \cos\alpha \times 0 + D_x \\ y_0 = 0 = \dfrac{q \times E}{2m} \times 0^2 + v_0 \times \sin\alpha \times 0 + D_y \\ z_0 = 0 = D_z \end{cases}$

Il vient : $\begin{cases} D_x = 0 \\ D_y = 0 \\ D_z = 0 \end{cases}$

Les coordonnées du vecteur position sont donc :

$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y = \dfrac{q \times E}{2m} \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \\ z = 0 \end{cases}$

</td></tr>
</table>

z est constamment nulle, ce qui confirme la planéité de la trajectoire. Par la suite, on limite l'étude des mouvements dans un champ uniforme à une étude dans repère à deux dimensions.

Détermination de l'équation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire d'un système est la relation mathématique entre ses coordonnées spatiales. Dans un repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$, elle est obtenue en combinant les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de façon à éliminer la variable temps t.

Mouvement dans un champ de pesanteur	Mouvement dans un champ électrique

On extrait t de l'expression de $x = f(t)$:

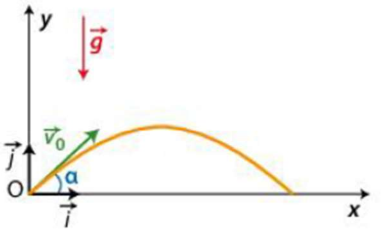
$$t = \frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$$

On remplace t dans l'expression de $y = g(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$$

La trajectoire du système est donc :

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \times \cos\alpha)^2} \times x^2 + \tan\alpha \times x$$



Trajectoire du système partant de la position O dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$

On extrait t de l'expression de $x = f(t)$:

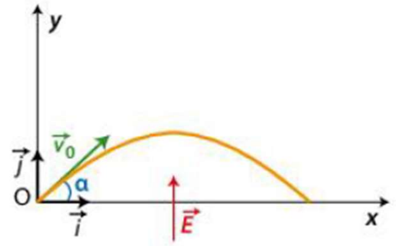
$$t = \frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$$

On remplace t dans l'expression de $y = g(t)$:

$$y = \frac{q \times E}{2m} \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \frac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$$

La trajectoire du système est donc :

$$y = \frac{q \times E}{2m \times (v_0 \times \cos\alpha)^2} \times x^2 + \tan\alpha \times x$$



Trajectoire du système de charge $q < 0$ C partant de la position O dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$

Conclusion : la trajectoire est une portion de parabole, dans le plan vertical contenant $\vec{v_0}$.

Aspects énergétiques dans un champ uniforme

- Le poids et la force électrique sont des forces conservatives. Elles sont associées respectivement à une énergie potentielle de pesanteur et une énergie potentielle électrique.
- L'énergie mécanique se conserve en l'absence de force non conservative :

$$\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = constante}$$

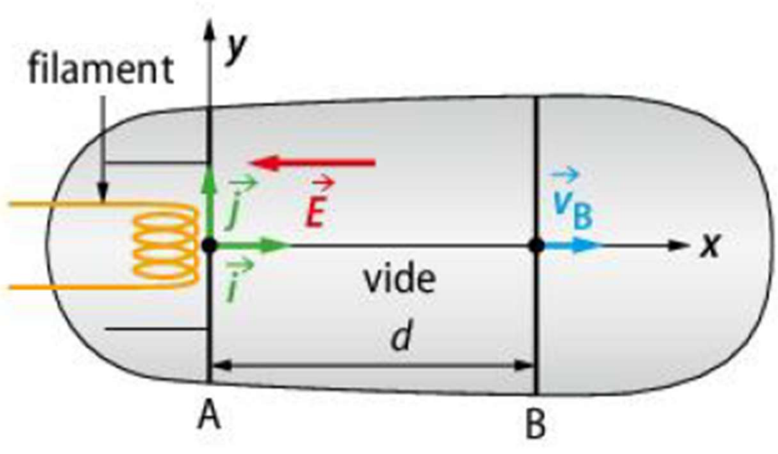
- L'énergie cinétique peut être totalement convertie en énergie potentielle et inversement.

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta \boldsymbol{E_c} = \sum \boldsymbol{W_{AB}(\vec{F})}$$

Principe de fonctionnement d'un accélérateur linéaire de particules

Schéma d'un canon à électrons



Dans un canon à électron, des électrons sont produits sans vitesse initiale par le filament qui est chauffé, puis les électrons sont accélérés dans un condensateur plan constitué par les plaques A et B.

Le travail de la force électrique entre les plaques A et B s'écrit :

$$W_{AB}(\vec{F_e}) = \vec{F_e}\,.\overrightarrow{AB} = q \times \vec{E}\,.\overrightarrow{AB} = (-e) \times (-E) \times d$$

Comme $E = \frac{U}{d}$, on en déduit l'expression :

$$W_{AB}(\vec{F_e}) = e \times U$$

Remarque $U_{AB} = -5{,}0\ kV$. Ici la valeur du champ électrique est comptée positive donc $U = -U_{AB}$.

Calcul de la vitesse des électrons

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

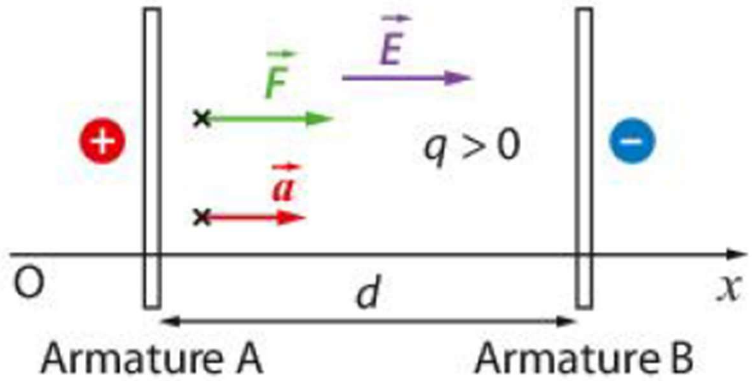
$$\frac{1}{2}\, m\, {v_B}^2 - 0 = e.U$$

Donc :

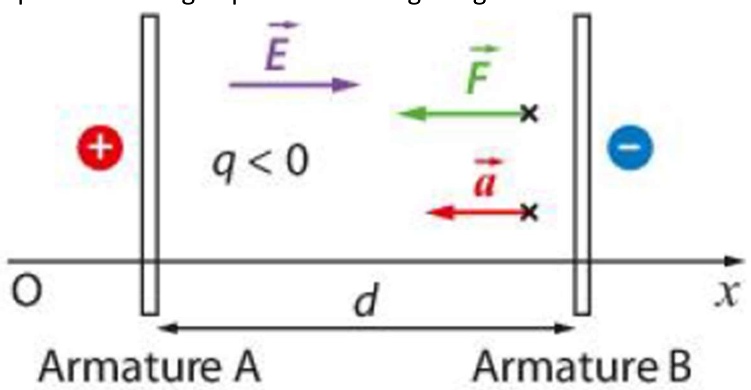
$$v_B = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Deux cas de figure

- La particule chargée porte une charge électrique positive



- La particule chargée porte une charge négative



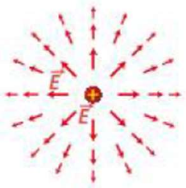
Exercices

Exercice 1 : QCM

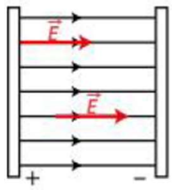
Exercice 2 : Reconnaître un champ vectoriel uniforme

Voici la cartographie de quatre champs vectoriels.

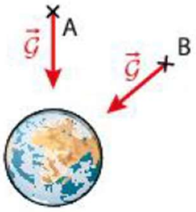
(a) Champ électrique dû à une charge ponctuelle



(b) Champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan



(c) Champ gravitationnel terrestre



(d) Champ de pesanteur terrestre dans l'espace de la photographie

- Identifier le(s) champ(s) uniforme(s).

Exercice 3 : Caractériser le champ de pesanteur terrestre

1. Donner la direction et le sens du champ de pesanteur
2. Pourquoi le champe de pesanteur terrestre est-il uniforme dans une région de l'espace de faibles dimensions ?

Exercice 4 : Etudier un champ électrique entre les armatures

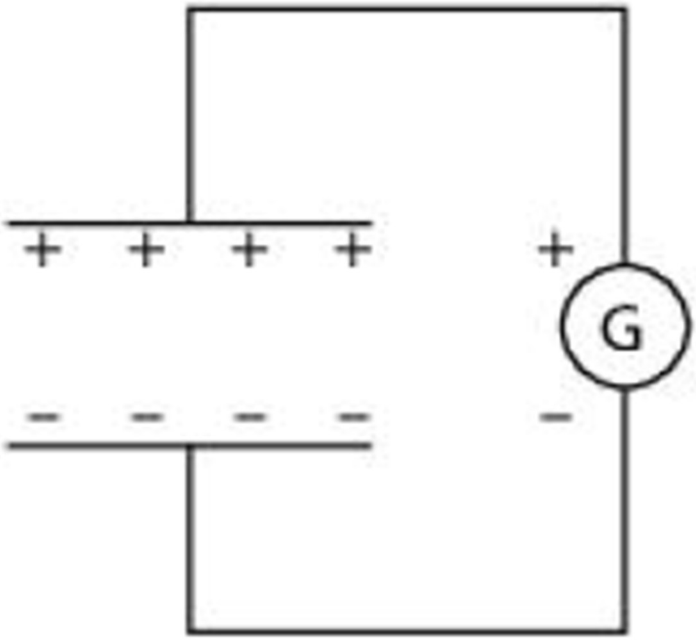
Entre les plaques A et B d'un condensateur plan reliées à un générateur de tension continue, règne un champ électrique uniforme de valeur $E = 1{,}0 \times 10^4\ N.C^{-1}$

Les plaques sont distantes de $d = 10{,}0\ cm$

1. Calculer la valeur absolue de la tension appliquée entre les plaques.
2. Comment varie la valeur du champ électrique si la distance d augmente ?

Exercice 5 : Caractériser un champ électrique

On a représenté ci-dessous les armatures d'un condensateur plan reliées aux bornes d'une source de tension continue. Les plaques sont distantes de $d = 20{,}0$ cm et la source impose une tension U de 10 kV.



1. Déterminer les caractéristiques (direction, sens et valeur) du champ électrique $\vec{E}$ qui règne entre les plaques.

2. Représenter le vecteur $\vec{E}$ en différentes positions entre les armatures, sans souci d'échelle mais avec cohérence.

Donnée

Valeur du champ électrique $\vec{E}$: $E = \frac{|U|}{d}$.

Exercice 6 : Représenter un vecteur accélération

Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération d'un point matériel M dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$, lié à un référentiel terrestre sont :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0\ m.s^{-2} \\ a_y = 7{,}8\ m.s^{-2} \end{cases}$$

1. Représenter ce vecteur dans le repère choisi.
2. Calculer la valeur a de l'accélération de M.

Exercice 7 : Exprimer le vecteur vitesse

Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération d'un point matériel M dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre sont :

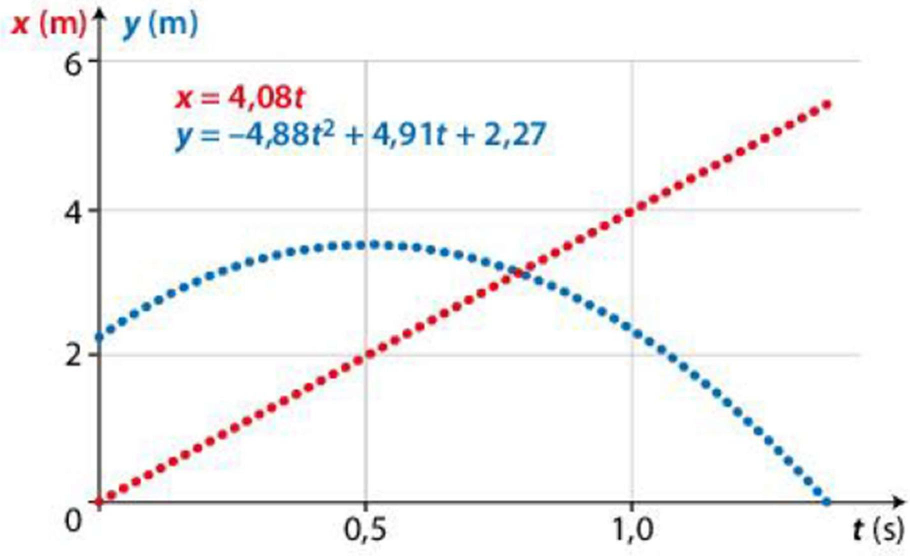
$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ a_y = 6{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ a_z = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse de M dans le cas où le vecteur vitesse initiale a pour coordonnées $\vec{v}_0\begin{cases} v_{x_0} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_{y_0} = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_{z_0} = 7{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$

2. Montrer que le mouvement du point M est plan.

Exercice 8 : Etablir l'équation de la trajectoire

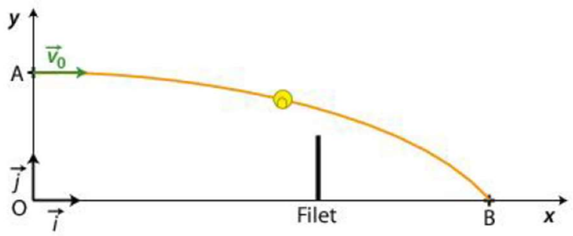
Le graphique ci-dessous représente l'abscisse x et l'ordonnée y du centre de masse G d'une balle au cours du temps. Les équations horaires sont précisées sur le graphique.



Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire du point G.

Exercice 9 : Appliquer la conservation de l'énergie

Pour servir au tennis, un joueur placé en O lance une balle verticalement et la frappe en A à une hauteur $H = 2,7$ m au-dessus du sol.
La balle part avec une vitesse horizontale de valeur $v_0 = 126 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dans un référentiel terrestre supposé galiléen. De masse m, elle n'est soumise qu'à son poids.



1. L'énergie mécanique de la balle est-elle constante ?

2. Montrer que l'expression de la valeur v_B de la vitesse de la balle lorsqu'elle touche le sol s'écrit :

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g \times H}$$

3. Calculer cette valeur. Uti

Donnée

Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice 10 : Utiliser les équations horaires

Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, l'étude du mouvement du centre de masse G d'un projectile conduit aux coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = 5,0 \times \cos(50°) \\ v_y = -9,8t + 5,0 \times \sin(50°) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = 5,0 \times \cos(50°) \times t \\ y = -\dfrac{1}{2} \times 9,8t^2 + 5,0 \times \sin(50°) \times t \end{cases}$$

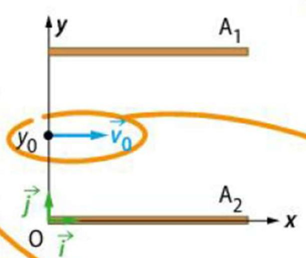
1. Écrire les coordonnées cartésiennes des vecteurs vitesse et position de G à la date $t = 0$ s.

2. À quelle date t_S le vecteur vitesse est-il horizontal ?

3. Déterminer l'altitude atteinte par G à cette date.

Exercice 11 : Déviation d'un champ électrique

Un champ électrique uniforme, de valeur $E = 5\,200 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, est créé par un condensateur plan constitué de deux armatures planes A_1 chargée négativement et A_2 chargée positivement séparées de 10 cm et longues de 10 cm. Un électron pénètre dans le champ $\vec{E}$ à l'ordonnée y_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$ parallèle aux plaques.



LES CLÉS DE L'ÉNONCÉ

- La valeur du champ indique que seule la force électrique est à considérer.
- Le schéma renseigne sur les conditions initiales de vitesse et de position.
- Le signe des charges indique l'orientation de $\vec{E}$.

Données : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; $v_0 = 1,0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\ell = 10$ cm ; $y_0 = 5,0$ cm.

1. Exprimer les composantes du vecteur accélération dans le repère (O ; x, y, z).

2. a. En déduire les équations horaires du mouvement de l'électron.

b. Établir l'équation de la trajectoire et montrer que le mouvement est plan.

c. L'électron sortira-t-il du condensateur plan ? Si oui, indiquer les coordonnées du point de sortie S.