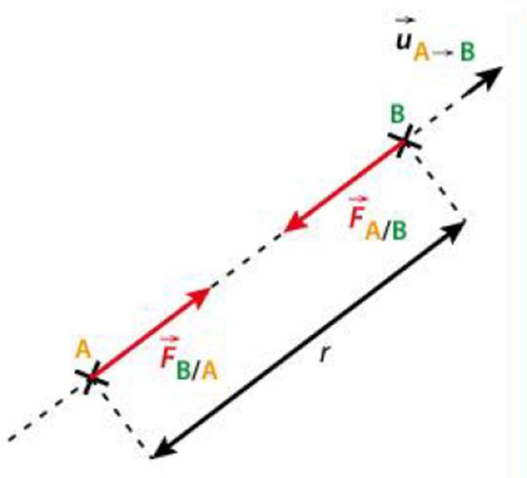
Mouvement dans un champ de gravitation

Mouvement des satellites et des planètes

Force et champ de gravitation



La force de gravitation exercée par un corps A de masse M_A sur un corps B de masse m_B séparés d'une distance r a pour expression :

$$\vec{F}_{A/B} = -G \times \frac{m_A \times m_B}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{A/B} = m_B\vec{\mathcal{G}}$$

G est la constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N. m².kg^{-1}

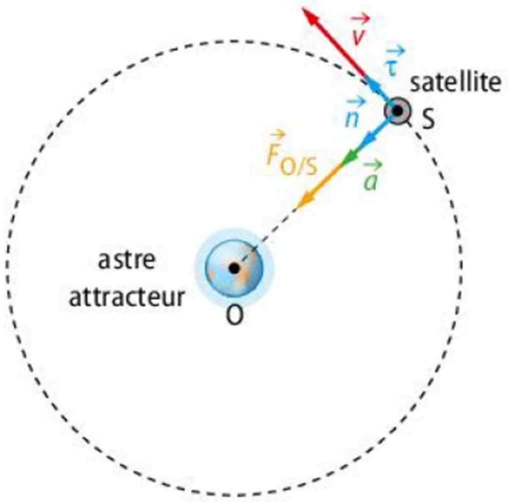
$\mathcal{G}$ est la valeur du champ de gravitation newtonien dû corps A en B à la distance r de A :

Par identification, on trouve que le champ de gravitation newtonien créé par le corps A en B est :

$$\vec{\mathcal{G}} = -G \times \frac{m_A}{r^2}\,\vec{u}_{A\to B}$$

Mouvement des satellites et des planètes

On se place dans le cas particulier où le mouvement d'une planète ou d'un satellite est circulaire autour de son astre attracteur (Soleil pour la Terre ou la Terre pour la Lune).



Dans le repère de Frenet, la force d'attraction sur le satellite a pour expression :

L'accélération dans le repère de Frenet a pour expression :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\cdot\vec{n}$$

Dans le référentiel considéré comme galiléen, la deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{O/S}}$$

D'où :

$$m\frac{dv}{dt}\,\vec{\tau} + m\frac{v^2}{r}\,\vec{n} = G\,\frac{m.M}{r^2}\,\vec{n}$$

Par identification, on en déduit que : $\frac{dv}{dt} = 0$. Ce qui implique que la vitesse est constante.

Par conséquent, pour une trajectoire circulaire, le mouvement d'un satellite est circulaire uniform $\vec{F}_{O/S} = G\frac{m \cdot M}{r^2}\vec{n}$

En identifiant les deux autres termes, on peut en déduire la vitesse du satellite sur sa trajectoire circulaire :

$$m\frac{v^2}{r}\,\vec{n} = G\,\frac{m.M}{r^2}\,\vec{n}$$

Donc :

$$\frac{v^2}{r} = G\,\frac{M}{r^2}$$

Et donc :

$$v^2 = G\,\frac{M}{r}$$

D'où :

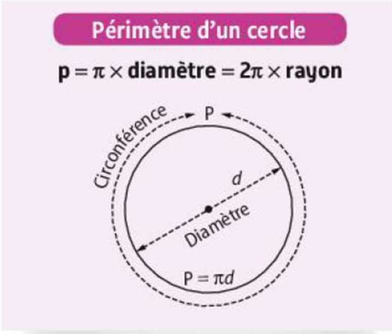
$$v = \sqrt{G\,\frac{M}{r}}$$

Remarque : dans le cas d'un satellite terrestre, r = R_T + h.

R_T représente le rayon de la Terre, et h l'altitude du satellite par rapport au sol ;

Conclusion : la vitesse d'un satellite ne dépend pas de sa masse. Deux satellites de masses différentes auront donc des vitesses égales s'ils sont sur la même trajectoire circulaire !

A partir de l'expression précédente, les élèves de Terminale spécialité physique doivent savoir retrouver la troisième loi de Kepler :



On peut donc écrire la vitesse autrement :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Avec T la période de révolution du satellite autour de l'astre attracteur.

On en déduit :

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

D'où :

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M}{r}$$

En inversant :

$$\frac{T^2}{4\pi^2 r^2} = \frac{r}{GM}$$

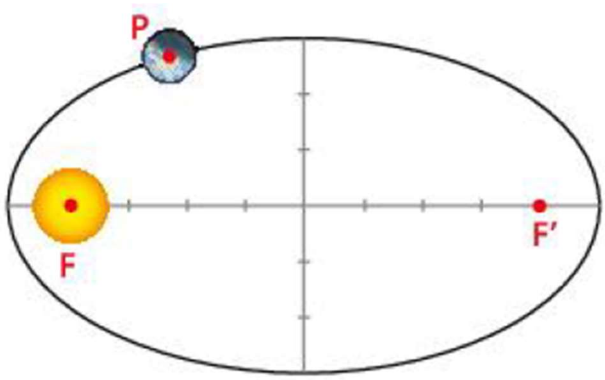
Et donc :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = constante$$

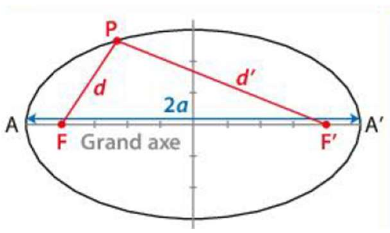
Les lois de Kepler

Première loi de Kepler ou loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de masse d'une planète est une ellipse dont l'un des foyers est le centre de masse du Soleil.



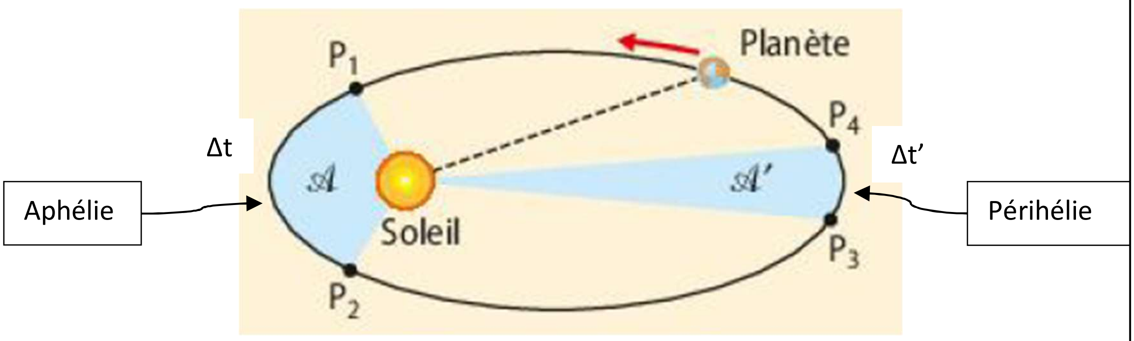
Remarque :



› Une ellipse est une courbe plane, définie comme l'ensemble des points P vérifiant la relation :
FP + F'P = $d + d' = 2a$
F et F' sont appelés les foyers de l'ellipse. [AA'] est le grand axe de l'ellipse avec AA' = $2a$.

Deuxième loi de Kepler ou loi des aires

Le segment reliant le centre du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.



Si les durées Δt et Δt' sont égales, alors les aires balayées A et A', par le segment reliant le Soleil à la planète, sont égales.

Puisque les aire A et A' sont égales, la longueur de l'arc $\widehat{P_1P_2}$ est plus petit que celui de l'arc $\widehat{P_3P_4}$.

Comme les arcs sont parcourus pendant la même durée, on en déduit que la vitesse de la planète au périhélie est plus grande qu'aphélie.

Conséquences :

- Pour une trajectoire elliptique autour du Soleil :
La vitesse est maximale au **périhélie** et minimale à **l'aphélie.**

- Pour une trajectoire elliptique autour de la Terre :
La vitesse est maximale au **périgée** et minimale à **l'apogée.**

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes

La période de révolution T d'une planète est la durée qu'elle met pour faire un tour autour du Soleil.

La période T au carré est proportionnelle au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = constante$$

La constante dépend de la masse de l'astre attracteur au foyer de l'ellipse.

Exercices

Exercice 1 : QCM

Exercice 2 : Caractéristiques d'une force de gravitation

1. Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre sur la Lune.
2. Représenter cette force en utilisant l'échelle 1 cm pour $0{,}5 \times 10^{20}$ N

Données

- Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.
- Masse de la Lune : $M_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg.
- Distance moyenne entre le centre de la Terre et le centre de la Lune : $r = 3{,}84 \times 10^5$ km.
- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Exercice 3 : Coordonnées d'un vecteur accélération

Le centre de masse P de Phobos, satellite naturel de la planète Mars, est en mouvement circulaire autour de cette planète.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération du centre de masse de Phobos dans le repère de Frenet lié au référentiel « marsocentrique ».

2. Montrer que le mouvement de P est uniforme.

Exercice 4 : Déterminer les caractéristiques d'une vitesse

Le télescope spatial Hubble a permis de nombreuses découvertes dans le domaine de l'astrophysique.
Il est placé sur une orbite quasiment circulaire à une altitude $h = 600$ km par rapport à la surface de la Terre.

1. Par application de la deuxième loi de Newton, déterminer les coordonnées du vecteur accélération du centre de masse H de Hubble dans le repère de Frenet lié au référentiel géocentrique.

2. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de Hubble dans le repère de Frenet.

3. Calculer la valeur de la vitesse de Hubble dans le référentiel géocentrique.

Données

- Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg.
- Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km.
- Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Exercice 5 : Etablir la 3ème loi de Kepler

Europe est un satellite de Jupiter, de masse M_J. Son orbite, de rayon, est supposée circulaire. Sa vitesse a pour valeur

$$v = \sqrt{\frac{G \times M_J}{r}}$$

1. Etablir l'expression de sa période T.
2. En déduire la valeur du rapport $\frac{T^2}{r^3}$
3. Enoncer la troisième loi de Kepler dans le référentiel « jupiterocentrique. ».

Exercice 6 : Exploiter la 3ème loi de Kepler

Les plus gros satellites de Jupiter, encore appelés satellites galiléens, ont été découverts par GALILÉE.
On donne les périodes de révolution T et le rayon r de la trajectoire quasi circulaire de deux de ces satellites :

Satellite	T (jours)	r (km)
Io	1,77	$4,22 \times 10^5$
Ganymède	7,15	$1,07 \times 10^6$

1. Énoncer la troisième loi de Kepler dans le référentiel « jupiterocentrique ».

2. Montrer que les données du tableau confirment que ces deux satellites sont en orbite autour de Jupiter.

Exercice 7 : Balance cosmique

Le tableau ci-dessous donne la période de révolution de quelques planètes du système solaire, ainsi que le rayon de leur orbite assimilable à un cercle dans le référentiel héliocentrique.

Satellite	Mars	Jupiter	Saturne
T (an)	1,88	11,86	29,44
r ($\times 10^6$ km)	228	778	1 427

1. Établir l'expression de la valeur de la vitesse du centre de masse d'une de ces planètes dans le référentiel héliocentrique.

2. En déduire l'expression de sa période de révolution en fonction de G, r et M_S (masse du Soleil).

3. Donner l'expression du rapport $\frac{T^2}{r^3}$ dans le référentiel héliocentrique. La troisième loi de Kepler est-elle vérifiée ?

4. Déterminer la masse M_S du Soleil.

5. Justifier en quoi la troisième loi de Kepler est une « balance cosmique ».

Données

- Constante universelle de gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
- 1 an $= 3,156 \times 10^7$ s.

Exercice 8 : L'astéroïde Sylvia

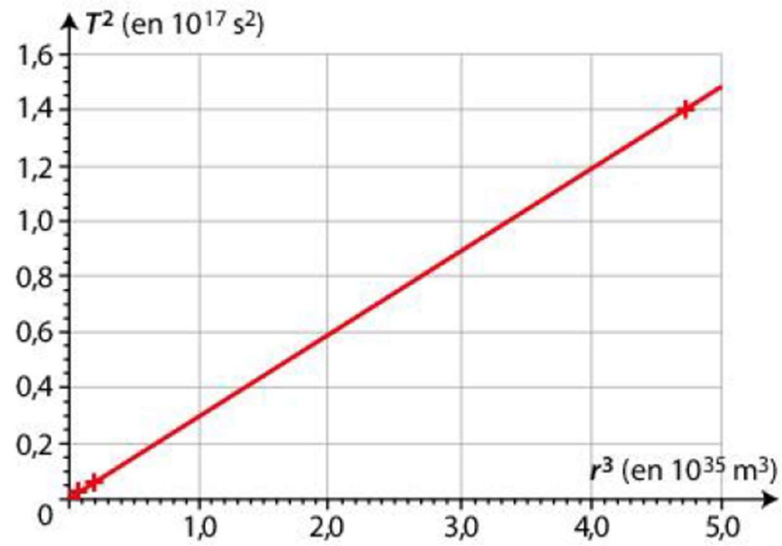
L'astéroïde Sylvia est le premier astéroïde découvert à posséder deux satellites naturels baptisés Rémus et Romulus.

On s'intéresse au mouvement du centre de masse P de l'astéroïde Sylvia qui décrit autour du Soleil une orbite assimilée à un cercle de rayon r.

L'étude se fait dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen.

Donnée

Constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.



1. a. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire, le mouvement de l'astéroïde Sylvia de masse M, autour du Soleil de masse M_S, est uniforme.

b. Établir l'expression de la valeur v de la vitesse de l'astéroïde Sylvia sur son orbite, puis donner son expression vectorielle $\vec{v}$.

2. a. Établir la troisième loi de Kepler dans le référentiel héliocentrique.

b. Le graphique ci-contre a été tracé en prenant en compte les paramètres caractéristiques de trois planètes du système solaire dont la trajectoire autour du Soleil est quasi circulaire.

Ce graphique traduit-il la troisième loi de Kepler ?

3. L'astéroïde Sylvia gravite autour du Soleil avec une période de révolution de 6,521 ans.

Déterminer le rayon r de l'orbite de l'astéroïde Sylvia.

4. Les deux satellites Romulus et Remus décrivent une orbite circulaire autour de Sylvia. La période de révolution de Romulus est 87,6 heures. Les distances entre chaque satellite et Sylvia sont 710 kilomètres pour Remus et 1 360 kilomètres pour Romulus.

En appliquant la troisième loi de Kepler, déterminer la masse de l'astéroïde Sylvia dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement circulaire.