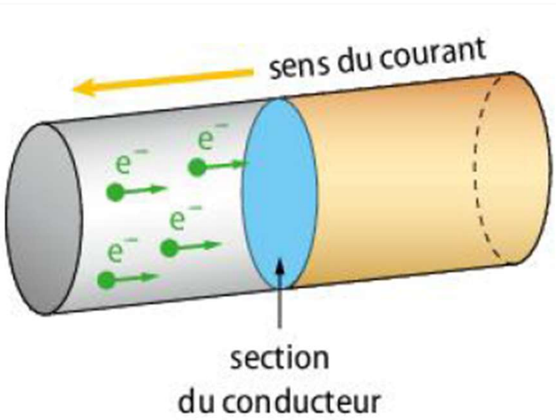
Dynamique d'un circuit électrique

L'intensité du courant électrique

Un courant électrique correspond à un déplacement d'ensemble de charges électriques

Dans un métal, le courant électrique est dû à un déplacement des électrons.



L'intensité du courant électrique dans un circuit correspond au débit de charges électriques à travers une section du conducteur. Un débit de charges électriques représente la quantité de charges électriques qui traverse une section du conducteur par unité de temps.

L'intensité du courant électrique est la mesure de la quantité du charges électriques qui traversent la section du conducteur par seconde.

Régime continu

L'intensité du courant électrique, noté I, ne dépend donc pas du temps. Le débit de charge à travers la section est constant.

La quantité de charges électriques $q(t)$ qui ont traversé la section à l'instant t est donc une fonction linéaire du temps. Dans le cas particulier du régime continu :

$$I = \frac{q(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad q(t) = I.t$$

On peut lire aussi : Q étant la charge ayant traversé la section pendant la durée Δt, on a la relation :

$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

Régime variable (qui varie avec le temps)

L'intensité i(t) du courant électrique dépend du temps. Le débit de charge à travers la section n'est plus constant.

Entre les instants t et $t + dt$, la quantité de charges électriques ayant traversé la section a pour expression :

$$q(t + dt) - q(t)$$

L'intensité électrique a donc pour expression :

$$i(t) = \frac{q(t + dt) - q(t)}{dt}$$

D'où :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Le condensateur

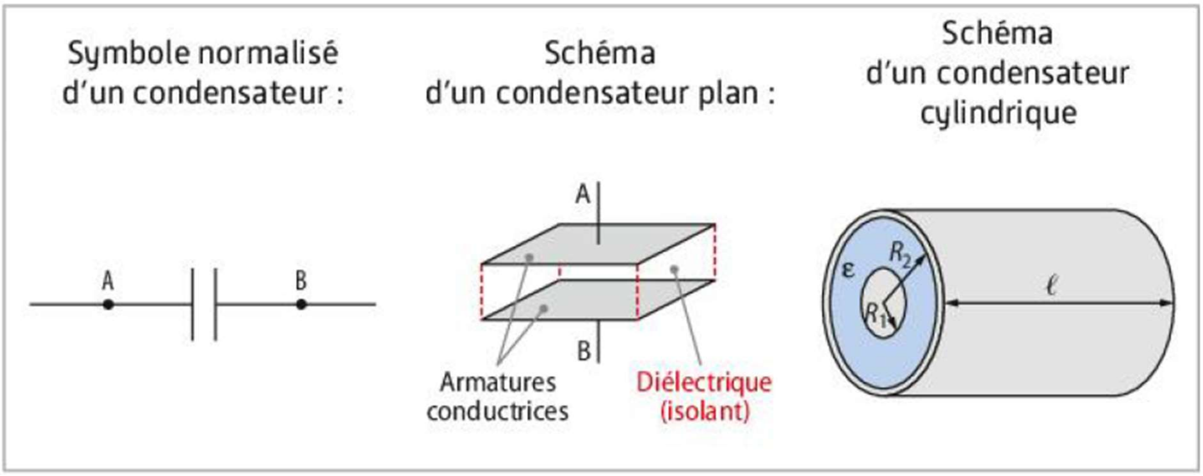
Comportement capacitif

Un comportement capacitif correspond à l'accumulation de charges électriques de signes opposés sur des surfaces en regard l'une de l'autre. On retrouve ce phénomène entre les nuages.

Modèle du condensateur

Définition

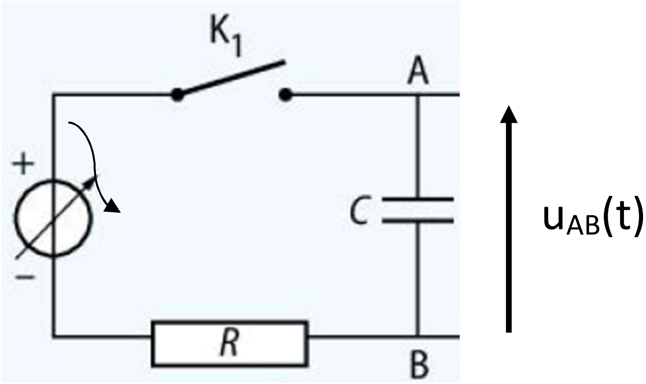
Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices placées face à face et séparées par un matériau isolant appelé diélectrique. Le matériau isolant peut très bien être de l'air.
Les deux surfaces s'appellent l'armature du condensateur.



Fonctionnement

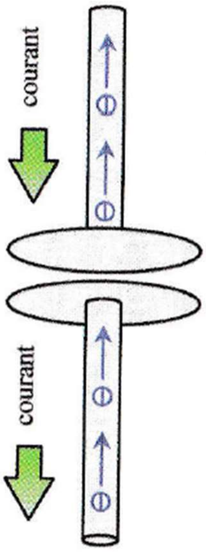
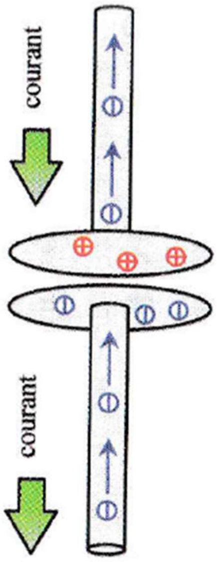
Un condensateur se charge lorsqu'il est soumis à une tension électrique.
Schéma électrique de la charge d'un condensateur :

On peut choisir la tension électrique E que l'on règle avant le début de l'expérience.

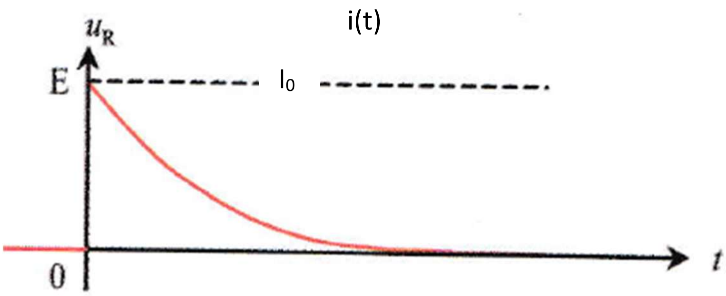


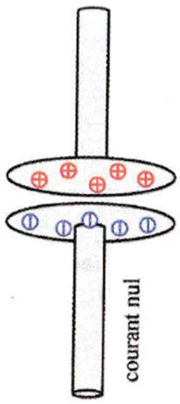
A t = 0 s, on ferme l'interrupteur K. La tension du générateur vaut constamment E.

Le courant circule pendant un cours instant car les charges ne peuvent pas traverser le condensateur. Il s'agit du régime transitoire.

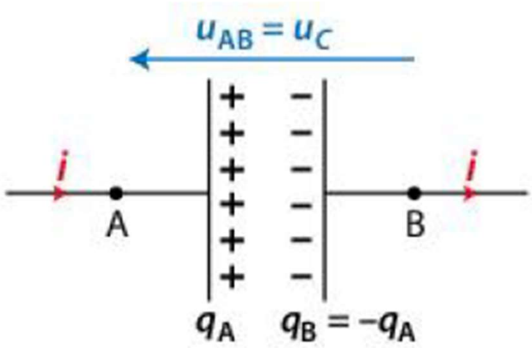
Initialement le condensateur est déchargé :	Pour t > 0 s, les charges s'accumulent sur les plaques :
	

Les charges ne peuvent pas traverser le condensateur, mais elles peuvent s'accumuler sur les plaques.
Du fait de la répulsion électrostatique entre les charges de même signe, il devient de plus en plus difficile aux électrons de s'accumuler sur la plaque inférieure.
Et du fait de l'attraction électrostatique entre des charges de signe contraire, il devient de plus en plus difficile aux électrons de quitter l'autre plaque.
L'intensité du courant électrique diminue alors progressivement jusqu'à devenir nul :

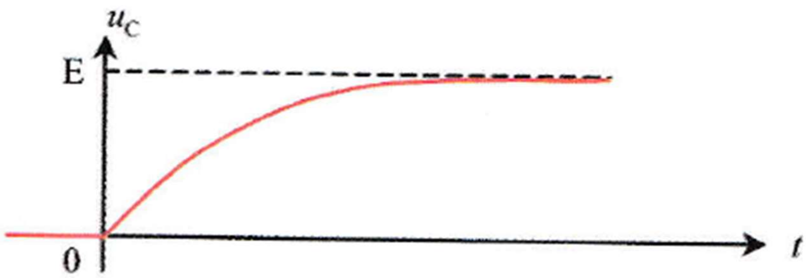




Lorsque le courant i(t) devient nul, le condensateur est entièrement chargé.



Les charges opposées portées par les armatures (plaques) créent une tension, d'origine électrostatique, qui augment au cours de la charge.
A t = 0 s, le condensateur est initialement déchargé et il n'y a pas de tension aux bornes du condensateur. Puis, au cours du temps une tension apparait et augmente jusqu'à être égale à E qui est la tension imposée par le générateur :



L'aptitude d'un condensateur à accumuler sur ses surfaces conductrices un grand nombre de charges électriques est appelée capacité C. Elle caractérise le condensateur et s'exprime en Farad F.
Pour un condensateur plan, on a la relation :

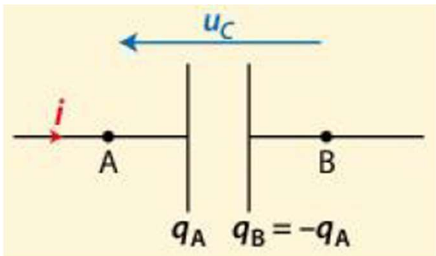
$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

La surface des plaques : S
La distance entre les plaques : d

Relation entre la charge électrique et la tension d'un condensateur

A tout instant, la charge $q_A(t)$, de l'armature A est proportionnelle à la tension $u_C(t)$ à ses bornes :

$$q_A = C \times u_C$$



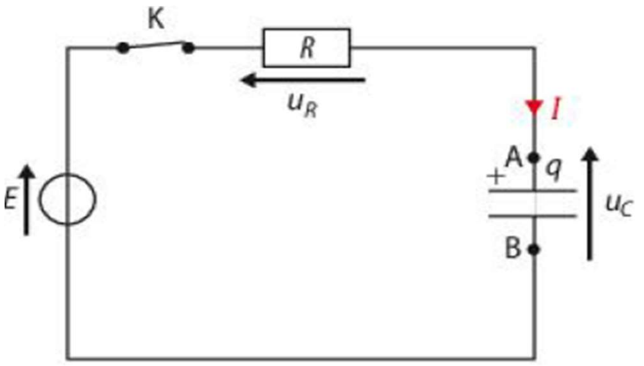
De plus, l'intensité du courant est la dérivée de la charge électrique q_A par rapport au temps.
On a donc la relation :

$$i(t) = \frac{dq_A}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$$

Remarque : le signe de $i(t)$ dépend du sens de variation de la tension $u_C(t)$

Charge d'un condensateur

Schéma :



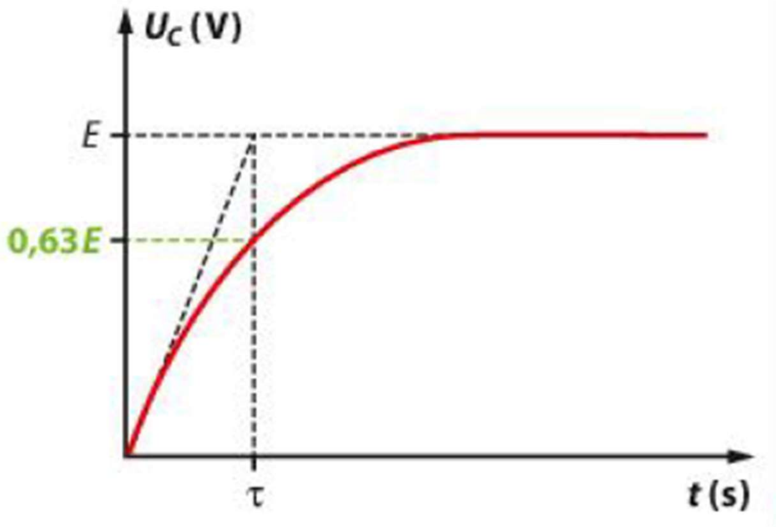
Condition initiale :

Le condensateur est déchargé à t = 0 s.

Donc : $q(0) = 0$ C

Et : $u_C(0) = 0\ V$

Evolution de la tension $u_C(t)$ lors de la charge du condensateur :



La constante de temps τ vaut :

$$\tau = R.C$$

Etablissement de l'équation différentielle et résolution

La loi d'additivité des tensions donne : $u_R(t) + u_C(t) = E$ soit $Ri(t) + u_C(t) = E$.

Or $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ et $q_A(t) = C \times u_c(t)$ donc $i(t) = RC\dfrac{du_{C(t)}}{dt}$. On obtient l'équation

différentielle de charge du condensateur $E = RC\dfrac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$.

Dans cette équation figurent la fonction $u_c(t)$ et sa dérivée par rapport a
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients
avec un second membre constant.
La solution de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre + la solution particulière :

$$u_C(t) = (u_C(t))g + (u_C)p$$

La solution particulière doit être vérifiée à chaque instant t donc $(u_C)p = E$.

La solution générale de l'équation $RC \times \dfrac{du_C(}{dt} + u_C(t)$ est : $(u_C(t))g = A \times e^{-\frac{t}{RC}}$

La solution de l'équation différentielle est $u_C(t) = A \times e^{-\frac{t}{RC}} + E$.

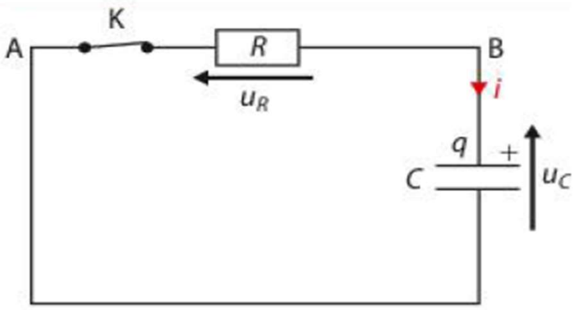
La condition initiale $u_C(0) = 0$ permet de déterminer la constante A :
$u_C(0) = A + E = 0$ donc $A = -E$.

La solution de cette équation différentielle est $u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.

On peut montrer que lors de la charge, à $t = \tau$, $u_C = 0{,}63 \times E$

Décharge d'un condensateur

Schéma

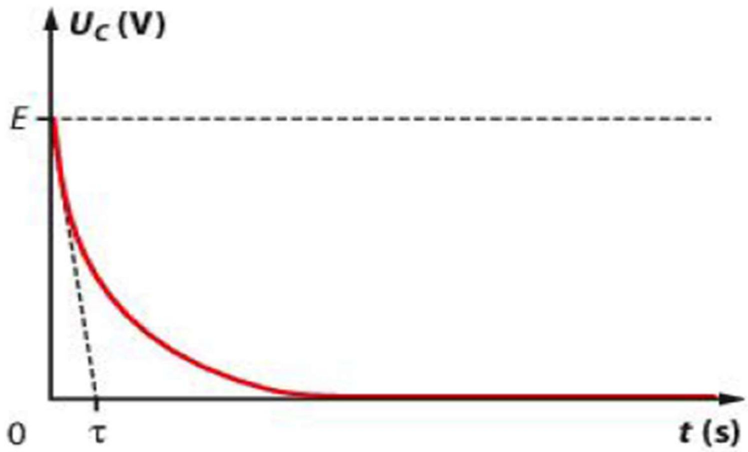


Condition initiale :

Le condensateur est chargé à t = 0 s.

$$u_C(0) = E$$

Evolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur lors de sa décharge



Etablissement de l'équation différentielle et résolution

La loi d'additivité des tensions donne : $u_R(t) + u_C(t) = 0$ soit $Ri(t) + u_C(t) = 0$.

Or $i(t) = \frac{dq_{(A)}(t)}{dt}$ et $q_A(t) = Cu_c(t)$ donc $i(t) = RC \times \frac{du_C(t)}{dt}$. On obtient l'équation

différentielle de décharge du condensateur $\boxed{0 = RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)}$.

Dans cette équation figurent la fonction $u_c(t)$ et sa dérivée par rapport au temps. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre.

La solution de cette équation : $u_C(t) = A \times e^{-\frac{t}{RC}}$

La condition initiale à la date $t = 0$, $u_C(0) = E = A$.

La solution de cette équation différentielle est $\boxed{u_c(t) = E \times e^{-\frac{t}{RC}}}$.

On peut montrer que lors de la décharge, à $t = \tau$, $Uc = 0,37 \times E$

Exercices

Exercice 1 : QCM

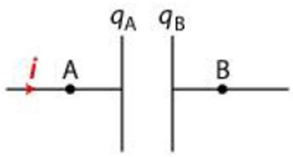
Exercice 2 : Définir une intensité

1. Quelle relation permet de définir l'intensité du courant électrique pendant une durée Δt ? L'illustrer d'un schéma.

2. Comment l'intensité du courant électrique est-elle définie dans une portion de conducteur ?

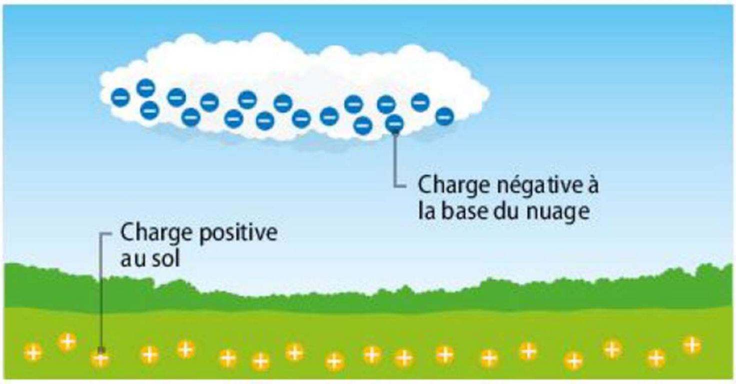
Exercice 2 : Comprendre le fonctionnement d'un condensateur

1. Identifier les parties conductrices et isolantes du condensateur schématisé ci-dessous.



2. Comment la charge électrique évolue-t-elle si l'intensité du courant i est positive ?

Exercice 3 : Identifier un condensateur

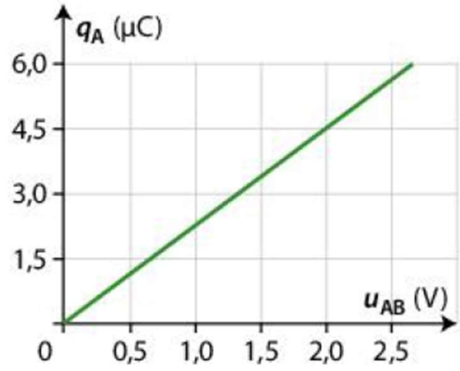


1. Expliquer pourquoi la situation illustrée s'apparente à celle observée lorsqu'un condensateur est chargé.

2. Représenter (direction, sens) le champ électrique qui règne dans l'espace séparant le nuage du sol.

Exercice 4 : Déterminer la capacité d'un condensateur

Le graphique ci-dessous représente la charge électrique d'une armature d'un condensateur en fonction de la tension à ses bornes.

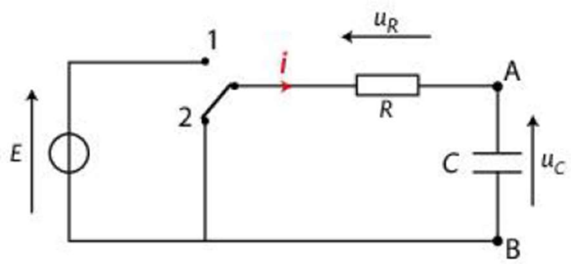


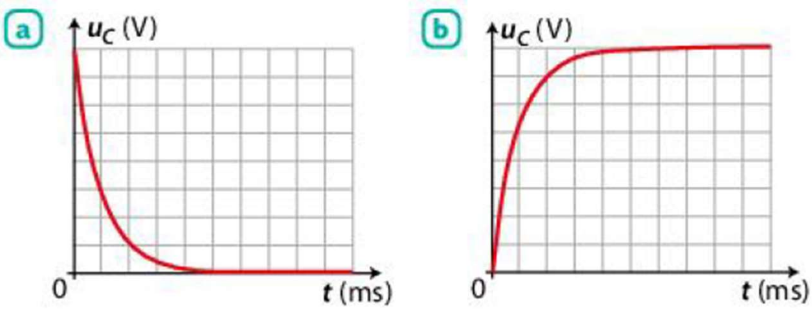
1. Rappeler la relation liant la charge q_A et la tension u_{AB} aux bornes du condensateur et déterminer sa capacité.

2. Est-elle d'un ordre de grandeur usuel ?

Exercice 5 : Différencier charge et décharge d'un condensateur

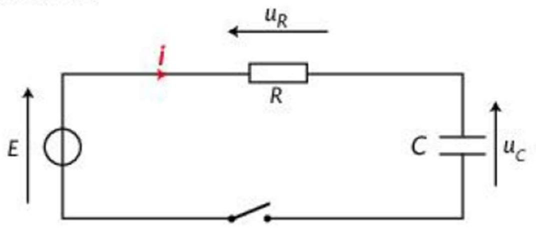
• Associer, à chaque position 1 ou 2 de l'interrupteur du schéma ci-dessous, le graphique représentant la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps.





Exercice 6 : Etablir une équation différentielle

Un condensateur préalablement déchargé est placé en série avec un conducteur ohmique. À $t = 0$ s, l'interrupteur est fermé.



1. Utiliser la loi des mailles pour établir une relation entre les tensions u_C, u_R et E.

2. Remplacer la tension u_R en utilisant la loi d'Ohm.

3. Sachant que $i = C \times \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, trouver l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.

Exercice 7 : résoudre une équation différentielle

• Relier chaque équation différentielle à sa solution.

$y' = 2y + 3$ avec $y(0) = -1$	•	•	$y = \frac{9}{2} \times e^{2x} - \frac{3}{2}$
$y' = 2y$ avec $y(0) = 5$	•	•	$y = \frac{1}{2} \times e^{2x} - \frac{3}{2}$
$y' = 2y + 3$ avec $y(0) = 3$	•	•	$y = 5 \times e^{2x}$

Exercice 8 : Résoudre une équation différentielle

L'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes d'un condensateur chargé à l'aide d'une source idéale de tension E est : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R \times C} + \frac{E}{R \times C}$.

1. Rappeler la forme des solutions d'une équation différentielle $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$.

2. Par identification, donner la forme des solutions de l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Exercice 9 : Calculer un temps caractéristique

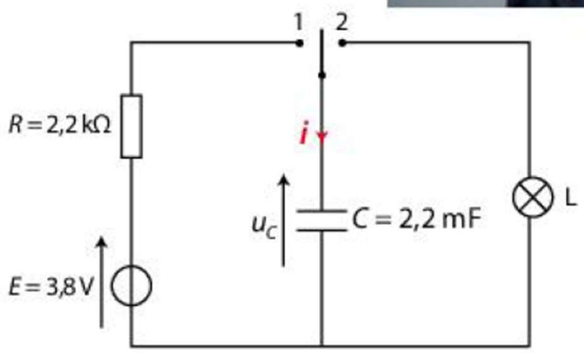
Un dipôle RC est constitué par l'association d'un condensateur de capacité $C = 47\ \mu F$ et d'un conducteur ohmique de résistance $R = 1,0\ k\Omega$.

1. Calculer le temps caractéristique de ce dipôle.

2. À partir de la loi d'Ohm et de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$, vérifier par une analyse dimensionnelle que l'expression du temps caractéristique est homogène.

Exercice 10 : Flash d'un appareil photographique

Un appareil photographique est équipé d'un flash alimenté par une batterie. Il comporte un circuit électronique dont une partie est schématisée ci-dessous.



Lors de la prise d'une photographie avec flash, le condensateur emmagasine de l'énergie fournie par la batterie pendant quelques secondes, puis la restitue dans une lampe en 0,1 s. La lampe L émet alors un éclair lumineux intense.

1. Sur quelle position faut-il placer l'interrupteur pour que le condensateur se charge ?

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur lors de sa charge.

3. Résoudre l'équation différentielle et montrer que $u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ lors de la charge.

4. Schématiser le circuit correspondant à la décharge du condensateur.

5. Calculer la résistance de la lampe si la durée Δt nécessaire pour que le condensateur soit déchargé à 99 % est 0,1 s.

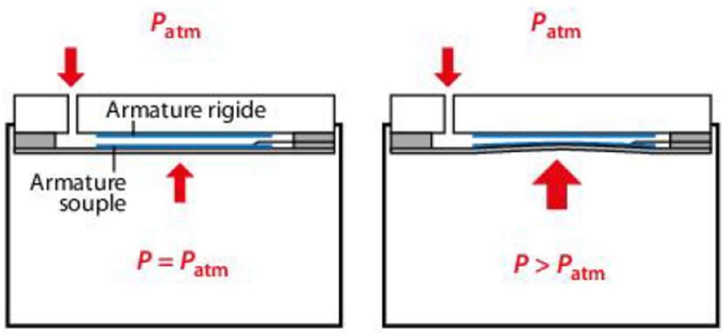
Exercice 11 : Capteur capacitif de pression

Les capteurs capacitifs de pression sont utilisés dans de nombreux dispositifs industriels visant à déterminer, par exemple, le taux de remplissage d'une cuve fermée hermétiquement.

A Capteur capacitif de pression relative

Un capteur capacitif de pression relative est constitué de deux armatures métalliques, l'une fixe et rigide, l'autre souple, placées face à face. Ce capteur capacitif permet de mesurer une pression relative ΔP par rapport à la pression atmosphérique P_{atm} :

$$\Delta P = P - P_{atm}$$



B Capacité d'un condensateur plan

La capacité (en F) d'un condensateur plan de surface S (en m^2) et dont le diélectrique, d'épaisseur e (en m), est constitué d'air, est donnée par :

$$C = 8{,}85 \times 10^{-12} \times \frac{S}{e}$$

1. Quelle est la pression relative mesurée par le capteur capacitif lorsque la pression P est égale à la pression atmosphérique ?

2. Ce capteur peut-il être assimilé à un condensateur plan ?

3. Comment la capacité de ce capteur évolue-t-elle lorsque la pression augmente du côté de l'armature souple ?

4. Le capteur présenté est caractérisé par des armatures de diamètre $D = 10$ cm et une épaisseur $e = 1$ mm.

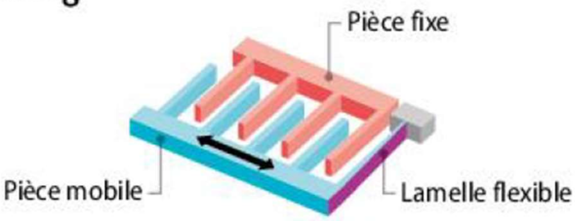
a. Calculer la capacité de ce capteur.

b. Son ordre de grandeur est-il usuel ?

Exercice 12 : Air bag et condensateur

Les accéléromètres sont utilisés dans les voitures pour détecter des variations brutales de vitesse liées à des chocs et déclencher des airbags.
Un accéléromètre capacitif est constitué de deux pièces en forme de peignes, sans contact entre elles (schémas **A**).

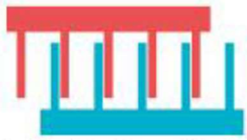
A Fonctionnement de l'accéléromètre et déclenchement d'un airbag



Les deux pièces face à face forment un condensateur.

En absence de choc, les dents de chaque pièce sont immobiles.

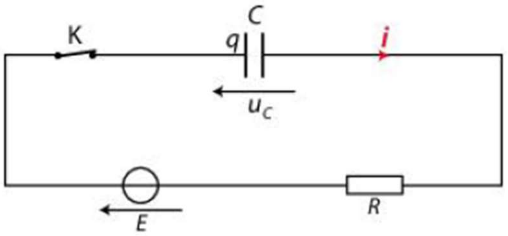
Lors d'un choc, la partie mobile se déplace. Cela modifie la capacité du condensateur.



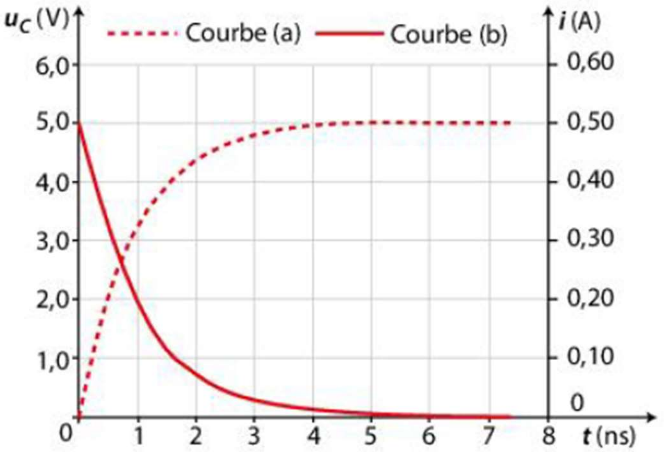
La détection de cette modification entraîne le gonflage de l'airbag.

B Circuit permettant l'étude du principe du capteur

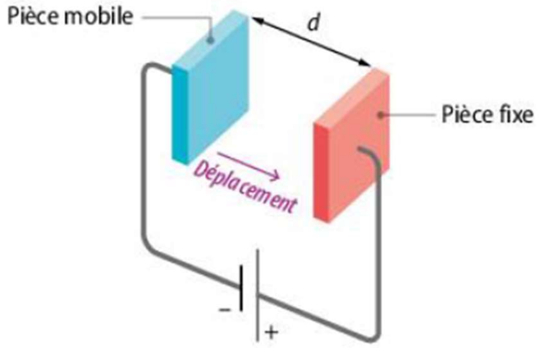
Un condensateur de capacité $C = 100$ pF, initialement déchargé, est associé à une source de tension et à un conducteur ohmique.



C Grandeurs électriques après fermeture de l'interrupteur K du circuit B à $t = 0$ s



D **Rapprochement des armatures lors d'un choc**



Partie I **Comportement en l'absence de choc**

La mise sous tension de l'accéléromètre revient à fermer l'interrupteur K du circuit **B**. Le condensateur est déchargé avant cette fermeture.
À l'instant $t = 0$, on ferme cet interrupteur.

1. Le condensateur du circuit **B** possède-t-il une capacité usuelle ?

2. Sur le graphique **C**, identifier, en justifiant qualitativement, la courbe correspondant à la tension u_C et celle correspondant à l'intensité i.

3. a. Déterminer graphiquement le temps caractéristique de la charge du dipôle RC.
b. Comparer ce temps à la durée d'un choc de l'ordre de 200 ms.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge.

5. La résoudre en faisant apparaître le temps caractéristique.

6. En déduire un ordre de grandeur de R.

7. Montrer que le graphique du document **C** permet de retrouver cet ordre de grandeur.

Partie II Comportement en cas de choc

Le rapprochement des deux armatures provoqué par un choc entraîne une augmentation de la capacité du condensateur (schéma **D**).

1. Parmi les deux propositions suivantes, choisir en justifiant celle qui peut convenir.

(a) $C = k \times d$ (b) $C = \frac{k}{d}$

2. Rappeler l'expression de la tension u_C aux bornes du condensateur et de la charge électrique q du condensateur avant le choc, en fonction de E (on pourra s'aider d'un schéma du circuit).

3. Montrer que lors d'un choc, des charges électriques sont mises en mouvement dans le circuit électrique, et identifier le sens de leur déplacement.

Exercice 13 : Trois, deux, un, zéro, chargé !

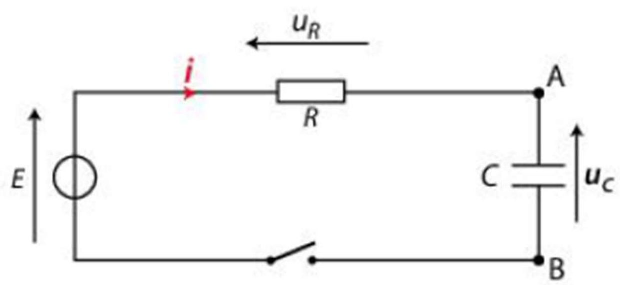
On associe un condensateur de capacité $C = 100\ \mu F$ en série avec un conducteur ohmique de résistance $R = 1{,}0\ k\Omega$. À l'instant $t = 0$ s, on ferme le circuit schématisé ci-contre. Préalablement déchargé, le condensateur est alors mis en charge. La source idéale de tension permettant cette charge est telle que $E = 6{,}0$ V.

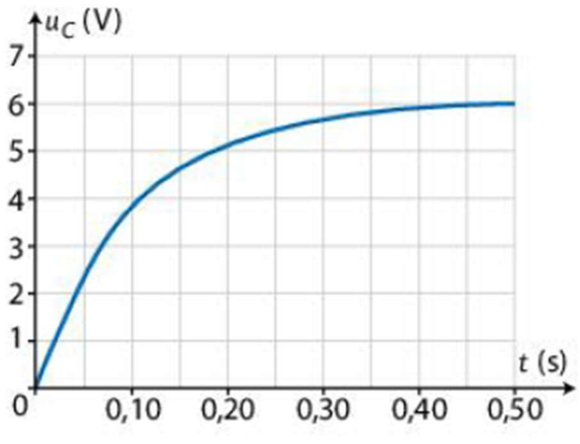
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge.

2. Résoudre cette équation différentielle et montrer que, lors de la charge, la tension u_C peut s'écrire, avec u_C exprimée en volt et t exprimée en seconde :

$$u_C = 6{,}0 \times \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}10}}\right)$$

3. Retrouver graphiquement le temps caractéristique du dipôle RC.





Exercice 14 : résoudre une équation différentielle

Côté maths

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y + 5$ pour laquelle $y(0) = 1$.

Côté physique & chimie

Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$u_C + R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \text{ avec } u_C(0) = E$$

Exercice 2 : Identifier le mode de transfert thermique