Les équations différentielles en physique

Une équation différentielle, est une équation liant les différentes dérivées d'une fonction y. En physique, on s'intéressera tout particulièrement aux dérivées temporelles (dy/dt).

Une équation différentielle est dite du « premier ordre » si elle ne contient que la dérivée première de y (y'). Elle est dite du « second ordre » si elle contient la dérivée seconde de y (y"), et ainsi de suite.

Une équation différentielle est dite à coefficients constants si les coefficients devant y et ses dérivées sont constants (indépendants du temps).
Une équation différentielle linéaire ne fait intervenir y et ses dérivées qu'à la puissance un. De cette façon, si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions, alors $y_1(t)+y_2(t)$ est aussi solution.
En physique, on ne s'intéressera qu'à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Equation du premier ordre.

La forme canonique (forme « standard » utilisée en physique) d'une équation différentielle du premier ordre est :

$$\frac{dy}{dt}+\frac{y}{\tau}=\frac{B}{\tau}$$ (De la forme $y'+ay=b$ en maths)

avec τ, un temps caractéristique, et B/τ, un second membre quelconque.

Résolution :

Pour trouver la solution y(t) d'une telle équation, il faut procéder en deux étapes.

- **On résout l'équation homogène**, c'est l'équation sans second membre : $\frac{dy}{dt}+\frac{y}{\tau}=0$.

Les solutions sont de la forme $\boxed{y_H(t)=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ où A est une constante que l'on déterminera avec les conditions initiales.

- **On cherche une solution particulière** de l'équation avec second membre.
La solution particulière a la même forme que le second membre. Ainsi, si B est une constante, alors on cherche une solution particulière y_P constante : $y_P=B$ convient.

B correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.

- La solution générale de l'équation différentielle est la somme est alors :

$$\boxed{y(t)=y_H(t)+y_P=A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+B}.$$

- **On détermine A** en utilisant les conditions initiales : $y(t=0)=A+B$.

Equations différentielles du deuxième ordre

La forme canonique d'une équation différentielle du deuxième ordre est :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=\omega_0^2y_{eq}$$ (De la forme $ay"+by'+cy=d$ en maths)

avec Q, le facteur de qualité, ω_0 la pulsation propre et y_{eq}, un second membre quelconque.

<u>*Résolution de l'équation homogène sans second membre :*</u> $\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=0}$

On définit **l'équation caractéristique** associée à l'équation différentielle par : $\boxed{r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0}$.

On cherche les solutions r associées à cette équation du second degré. Elles dépendent du signe du discriminant : $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)=b^2-4ac$.

- **Si Δ est positif, ou Q < ½ (régime apériodique)** on a deux racines réelles distinctes :

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$y(t)=A\mathrm{e}^{r_1t}+B\mathrm{e}^{r_2t}$ avec A et B des constantes.

- **Si Δ est nul, ou Q = ½ (régime critique)** on a une racine double

$$\boxed{r=\frac{-b}{2a}=-\frac{\omega_0}{2Q}=-\frac{1}{\tau}}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$y(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left[A+Bt\right]$ avec A et B des constantes.

- **Si Δ est négatif, ou Q > ½ (régime pseudo-périodique)** on a deux racines imaginaires distinctes. En notant j le nombre complexe,

$$\boxed{r_{1,2}=\frac{-b\pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}.$$

On note : $r_{1,2}=-\frac{1}{\tau}\pm j\omega$ où $\omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$ est la pseudo-pulsation des oscillations.

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$y(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right]$ ou $y(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)C\cos(\omega t+\varphi)$

avec A, B, C et φ des constantes.

Dans le cours de physique une équation est particulièrement importante :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=0$$

Il faut connaître ses solutions : $y(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)=C\cos(\omega_0 t+\varphi)$

<u>*Résolution de l'équation avec second membre :*</u>

En plus de la solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre. Dans le cas d'un second membre constant, la solution particulière correspond à y_{eq}.

La solution particulière correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.