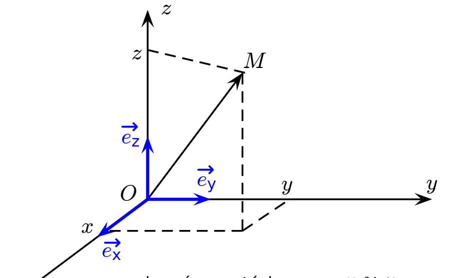
Fiche méthode
Mathématiques

Formulaire d'analyse vectorielle

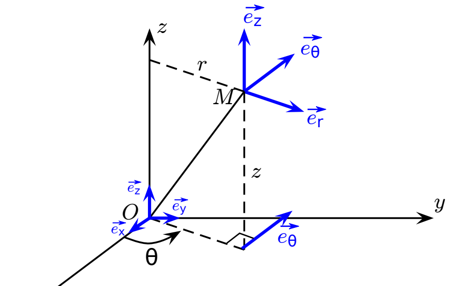
I Systèmes de coordonnées, volumes, surfaces et déplacements élémentaires

I.1 Définitions*



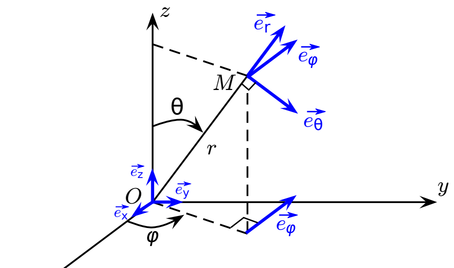
coordonnées cartésiennes : $x\ y\ z$

$x, y, z \in]-\infty, +\infty[$



coordonnées cylindriques : $r\ \theta\ z$

$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$z \in]-\infty, +\infty[$

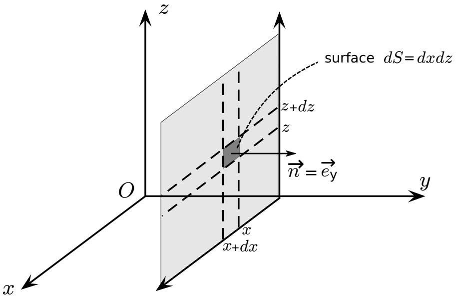


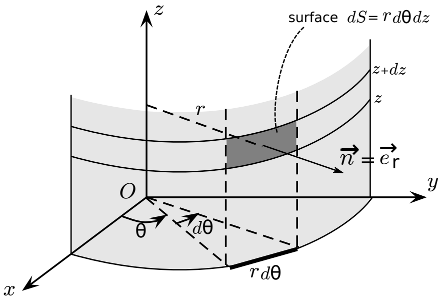
coordonnées sphériques : $r\ \theta\ \varphi$

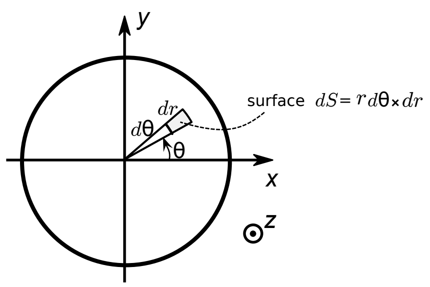
$r \in [0, +\infty[$
$\theta \in [0, \pi]$
$\varphi \in [0, 2\pi]$

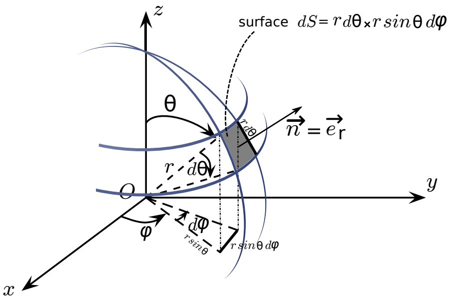
Remarque : Les coordonnées polaires correspondent aux coordonnées cylindriques, mais dans un plan seulement (coordonnées r et θ, pas de z). C'est un système à deux dimensions.

I.2 Surfaces infinitésimales



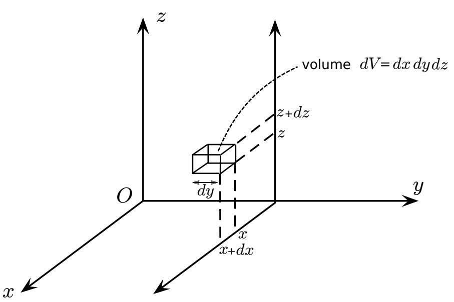


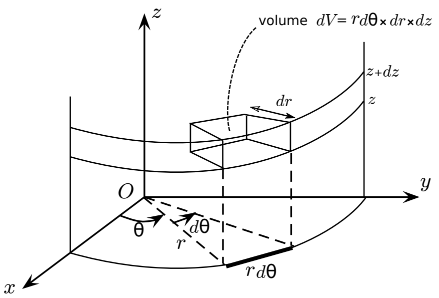


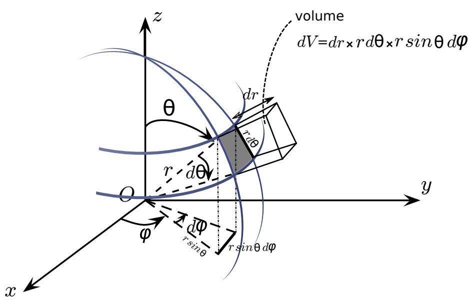


Remarque : C'est bien, à chaque fois, homogène à une surface.

I.3 Volume infinitésimal







Expression du volume infinitésimal, selon les coordonnées utilisées :

- Cartésiennes* : $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
- Cylindriques : $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.
- Sphériques : $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

Remarque : C'est bien, à chaque fois, homogène à un volume. On remarque aussi que $\mathrm{d}V$ est donné par le produit des composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ (cf ci-dessous).

I.4 Vecteur déplacement infinitésimal

Expression du vecteur déplacement infinitésimal, selon les coordonnées utilisées :

- Cartésiennes* : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.
- Cylindriques : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.
- Sphériques : $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$.

La même chose avec possibilité de faire bouger la figure, et d'afficher l'élément de surface et de volume :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/index.php.

Remarque :

- pour obtenir l'élément de volume, il faut multiplier les trois composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$;
- pour obtenir l'élément de surface $\mathrm{d}S$ dont la normale est l'un des trois vecteurs de la base, il faut multiplier les deux autres composantes de $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$.

II Champs scalaire et vectoriel, intégrales

II.1 Définitions*

- Un champ scalaire est une fonction qui, à tout point M de l'espace, associe un nombre.

  Mathématiquement, c'est donc une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

  Exemples : le potentiel électrostatique $V(M)$, la pression $p(M)$, l'indice optique $n(M)$, sont des champs scalaires.

- Un champ vectoriel est une fonction qui, à tout point M de l'espace, associe un vecteur.

  Mathématiquement, c'est donc une fonction $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

  Exemples : le champ électrique $\vec{E}(M)$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$, la champ des vitesses $\vec{v}(M)$, sont des champs vectoriels.

II.2 Variation infinitésimale*

Pour une fonction d'une seule variable on connaît* :

$$f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}f$$
$$\boxed{f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + f'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Pour un champ scalaire (donc à trois variables), ceci devient* :

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) = f(x,y,z) + \mathrm{d}f$$
$$\boxed{f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) = f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z}$$

(et il existe des expressions similaires en coordonnées cylindriques ou sphériques)

Cette dernière expression indique comment évolue $f(x,y,z)$ si on l'évalue un peu plus loin, plus précisément en un point décalé du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ par rapport au point (x,y,z).

Si on utilise la définition du gradient en coordonnées cartésiennes, on voit qu'on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

On en déduit le théorème reliant gradient et variation infinitésimale* :

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}}$$

Conséquences :

- On a $\boxed{\int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \;=\; \int_A^B \mathrm{d}f \;=\; f(B) - f(A).}$
- Si $\mathrm{d}f > 0$, c'est que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sont plutôt dans le même sens : le gradient pointe vers les zones où f augmente.
- Si $\mathrm{d}f = 0$, c'est que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sont perpendiculaires : le gradient est perpendiculaire aux surfaces $f = \mathrm{cst}$.

II.3 Intégrales sur un volume, une surface, un contour*

Ici, f désigne un champ scalaire quelconque et $\vec{A}$ un champ vectoriel quelconque.

Sur un contour ou chemin

Notation	Ce que c'est	Variantes et remarques	Exemples cette année
$\displaystyle\int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} f(M)\mathrm{d}l$	intégrale de la quantité $f(M)$ le long d'un chemin ou contour $\mathcal{C}$ rejoignant les points A et B.	$\oint_{\mathcal{C}} f(M)\mathrm{d}l$: même chose mais le contour est fermé (il boucle sur lui-même). Attention, il faut préciser dans quel sens parcourir le contour.	chemin optique $(AB) = \int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} n(M)\mathrm{d}l$ longueur d'une courbe $L_{AB} = \int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} \mathrm{d}l$
$\displaystyle\int_{B_1\,(\mathcal{C})}^{B_2} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$	intégrale de la quantité $\vec{A}(M)$ le long d'un chemin ou contour $\mathcal{C}$ rejoignant les points B_1 et B_2. $\vec{A}$ étant un champ vectoriel, on parle de la *circulation* de $\vec{A}$ le long du contour $\mathcal{C}$.	$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$: même chose mais le contour est fermé. Attention, il faut préciser dans quel sens parcourir le contour.	circulation du champ électrique $C = \int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ circulation du champ magnétique (th. d'Ampère) $\int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} \vec{B}(M)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ travail d'une force $\int_{A\,(\mathcal{C})}^{B} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

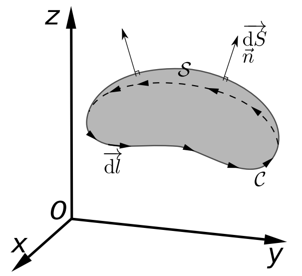
Sur une surface

Notation	Ce que c'est	Variantes et remarques	Exemples cette année
$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(M)\mathrm{d}S$	intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface $\mathcal{S}$.	$\oiint_{\mathcal{S}} f(M)\mathrm{d}S$: même chose mais la surface est fermée.	Expression de la surface : $S = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S$
$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} f(M)\overrightarrow{\mathrm{d}S}$	intégrale de la quantité $f(M)$ sur la surface $\mathcal{S}$. $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{n}$ avec $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface. Attention, la surface $\mathcal{S}$ est orientée : il faut indiquer où est la normale extérieure.	idem	Expression de la résultante des forces de pression : $\vec{F} = \iint_{\mathcal{S}} p\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$
$\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$	intégrale de $\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ sur la surface $\mathcal{S}$. Il s'agit du *flux* du champ de vecteur $\vec{A}$ à travers la surface $\mathcal{S}$. $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{n}$ avec $\vec{n}$ le vecteur normal à la surface. Attention, la surface $\mathcal{S}$ est orientée : il faut indiquer où est la normale extérieure.	$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$: même chose mais la surface est fermée. Normale sortante par convention	Flux de $\vec{E}$ dans le théorème de Gauss : $\Phi_{\vec{E}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Débit volumique $D_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Débit massique $D_\rho = \iint_{\mathcal{S}} \rho\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Flux thermique $\Phi_{\mathrm{th}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\mathrm{th}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ Intensité $I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Sur un volume

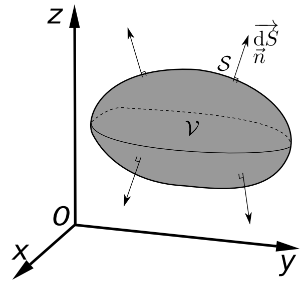
Notation	Ce que c'est	Variantes et remarques	Exemples cette année
$\iiint_{\mathcal{V}} f(M)\,\mathrm{d}V$	intégrale de la quantité $f(M)$ sur le volume V.		Expression du volume : $V=\iiint_{\mathcal{V}}\mathrm{d}V$ Masse totale $M=\iiint_{\mathcal{V}}\rho\,\mathrm{d}V$ Charge totale $Q=\iiint_{\mathcal{V}}\rho\,\mathrm{d}V$

II.4 Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski



- Théorème de Stokes-Ampère : $\boxed{\oint_{\mathcal{C}}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}=\iint_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$

  Ici $\vec{A}$ est un champ vectoriel quelconque. $\mathcal{C}$ est un contour fermé orienté. $\mathcal{S}$ est une surface qui s'appuie sur le contour $\mathcal{C}$, orientée dans le sens direct par rapport à $\mathcal{C}$ (règle de la main droite).



- Théorème d'Ostrogradski : $\boxed{\oiint_{S}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iiint_{\mathcal{V}}(\mathrm{div}\vec{A})\,\mathrm{d}V}$

  Ici $\vec{A}$ est un champ vectoriel quelconque. $\mathcal{S}$ est la surface fermée qui entoure le volume $\mathcal{V}$, et sa normale est sortante.

Remarque :

- On a également le théorème du gradient, qui sert par exemple à démontrer la formule d'Archimède : dans la même situation que pour Ostrogradski, on a $\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} f\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\iiint_{\mathcal{V}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)\mathrm{d}V}$

III Opérateurs rotationnel, divergence, gradient, laplacien

III.1 Expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes*

(tout le contenu de cette partie : à connaître ou à savoir retrouver rapidement)

$f(x,y,z)$ est un champ scalaire quelconque. $\vec{A}(x,y,z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues.

On note les vecteurs avec la notation $\vec{A}=\left|\begin{array}{l}A_x\\A_y\\A_z\end{array}\right.=A_x\,\vec{e}_x+A_y\,\vec{e}_y+A_z\,\vec{e}_z$

On introduit le "vecteur" nabla : $\vec{\nabla}=\left|\begin{array}{c}\dfrac{\partial}{\partial x}\\\dfrac{\partial}{\partial y}\\\dfrac{\partial}{\partial z}\end{array}\right.$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcément pour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	Remarque importante	Expression en coordonnées cartésiennes	Comment le retrouver avec nabla
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$	s'applique à un **scalaire** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence $\text{div}\, \vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$
Laplacien scalaire $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right)$	s'applique à un **scalaire** retourne un **scalaire**	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \left\Vert \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right\Vert^2 f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$
Laplacien vectoriel $\Delta \vec{A}$	s'applique à un **vecteur** retourne un **vecteur**	$\begin{vmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$	Rq : on trouve parfois la notation $\vec{\Delta}\vec{A}$, qui insiste sur le fait que le laplacien vectoriel retourne un vecteur.

III.2 Identités entre opérateurs

On a les identités suivantes (ne sont pas à mémoriser) :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\right) = -\Delta \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\, \vec{A}\right)$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \vec{0}, \quad \text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\right) = 0$

  (moyen mnémotechnique pour les deux dernières : elles s'écrivent, avec nabla : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f)$, or "$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} = \vec{0}$", et $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$, or "$\vec{\nabla} \perp (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$".

III.3 Théorème de Schwartz : permutation des dérivées partielles*

Si la fonction f est assez régulière (ce qui est le cas en physique), on on peut échanger l'ordre des dérivées partielles, par exemple

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.}$$

Ou encore

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}.}$$

Comme les différents opérateurs font agir des dérivées partielles, on a aussi des égalités du type :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \quad \text{etc.}}$$

III.4 Développement de produits

On a les identités suivantes (ne sont pas à mémoriser) :

- $\operatorname{div}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}$
- $\overrightarrow{\operatorname{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f$
- $\operatorname{div}\left(f\,\vec{A}\right) = f\operatorname{div}\vec{A} + \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\right) \cdot \vec{A}$
- Etc...

III.5 Expressions en coordonnées cylindriques et sphériques

(ne sont pas à mémoriser)

Coordonnées cylindriques (f champ scalaire, $\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_z\vec{e}_z$ champ vectoriel) :

- $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$
- $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$
- $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Coordonnées sphériques (f champ scalaire, $\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$ champ vectoriel) :

- $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi$
- $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\,A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta\,A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r\,A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$
- $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Remarque : En coordonnées cylindriques ou sphériques, si $f = f(r)$ ne dépend que de r, on a simplement

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r.}$$

IV Exercices

Donner les expressions des opérateurs demandés dans chacun des cas ci-dessous. Il faut à chaque fois choisir un système de coordonnées. S'aider du formulaire lorsqu'il s'agit des coordonnées cylindriques ou sphériques. Pour les coordonnées cartésiennes, il faut y parvenir sans s'aider de la fiche.

- $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_z$: divergence, rotationnel, laplacien vectoriel [1].
- $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_r$ (coordonnées sphériques) : divergence [2], rotationnel [3].
- $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta$ (coordonnées cylindriques) : divergence [4], rotationnel [5].
- $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2$: gradient [6], laplacien scalaire [7].

1. Tous nuls car $\vec{E}$ est uniforme (le même dans tout l'espace).
2. Attention, bien que E_0 soit constant, le vecteur $\vec{E}$ ne l'est pas car la direction de $\vec{e}_r$ dépend du point où l'on se place. Il faut utiliser les formules : on a $\vec{E} = E_r\vec{e}_r$, donc $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2E_r)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}(r^2E_0)}{\mathrm{d}r} = \dfrac{2E_0}{r}$
3. Nul car on voit dans l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques qu'il n'y a aucun terme en $\dfrac{\partial E_r}{\partial r}$: tous les termes sont donc nuls.
4. On a $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$ avec $B_\theta = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, donc $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial\theta} = 0$ car B_θ ne dépend pas de θ.
5. On a $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$, donc $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_\theta)}{\partial r}\vec{e}_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\left(r\times\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)}{\partial r}\vec{e}_z = \vec{0}$.
6. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = (2x+y)\,\vec{e}_x + (2y+x)\,\vec{e}_y$.
7. D'abord : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ et (en dérivant à nouveau) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$. Ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$ et (en dérivant à nouveau) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. Enfin $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$. Le laplacien est la somme des trois dérivées secondes : $\Delta f = 4$.