Fiches de physique

Thibault WEBER

Table des matières

0.1 Valeurs numériques

$\pi \approx 3.1416$ $\quad$ $\mathrm{e} \approx 2.718$
$\ln 2 \approx 0.693$ $\quad$ $\ln 3 \approx 1.1$ $\quad$ $\ln 10 \approx 2.3$
$\sqrt{2} \approx 1.414$ $\quad$ $\sqrt{3} \approx 1.732$

$m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ $\quad$ $e \approx 1.302 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ $\quad$ $m_n \approx m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ $\quad$ $\mathcal{N}_a \approx 6.02 \cdot 10^{23}$
$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{SI}$
$M_{\text{Terre}} \approx 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ $\quad$ $M_{\text{Soleil}} \approx 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ $\quad$ $T_S \approx 86164\,\mathrm{s}$ $\quad$ $R_S \approx 42220\,\mathrm{km}$ $\quad$ $v_S \approx 3079\,\mathrm{m/s}$
$r_{\text{T-S}} = 1\,\text{ua} \approx 150 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ $\quad$ $T_T = 1\,\text{an} \approx 365.25 \times 86400\,\mathrm{s}$
1 cal = 4.18 J : permet d'élever d'1 K 1 kg d'eau

0.2 Analyse vectorielle

$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = (h_1(q_1,q_2,q_3)\,\mathrm{d}q_1, h_2(q_1,q_2,q_3)\,\mathrm{d}q_2, h_3(q_1,q_2,q_3)\,\mathrm{d}q_3)$
cyl : $h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = 1$ $\qquad$ sph : $h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\sin\theta$

Nabla : $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial .}{\partial x}, \frac{\partial .}{\partial y}, \frac{\partial .}{\partial z}\right)$

$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{1}{h_1}(\frac{\partial f}{\partial q_1}), \frac{1}{h_2}(\frac{\partial f}{\partial q_2}), \frac{1}{h_2}(\frac{\partial f}{\partial q_2})\right)$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\text{cart}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\text{cyl}} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)_{\text{sph}}$

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \lim\limits_{V\to 0} \frac{1}{V} \oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_3)\right]$
$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \lim\limits_{\Sigma\to 0} \frac{1}{\Sigma} \oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}\,\vec{n} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{u}_1 & h_2\vec{u}_2 & h_3\vec{u}_3 \\ \frac{\partial .}{\partial q_1} & \frac{\partial .}{\partial q_2} & \frac{\partial .}{\partial q_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$
$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\text{cart}} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\text{cyl}} = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \dots\right)_{\text{sph}}$
Flux : $\phi(\vec{A},\Sigma) = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\qquad$ (surf fermée : $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ vers l'ext)
Th de Green-Ostrogradsky : $\oiint_\Sigma \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$
Circulation : $C_{PQ,\vec{A}} = \int_P^Q \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$
Th de Stokes : $\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$
Formule du gradient : $\oiint_\Sigma f\,\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,\mathrm{d}\tau$
Formule de Kelvin : $\iiint \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau = -\oiint_\Sigma \vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\qquad$ démo : avec $\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B})$

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$
$\mathrm{div}(f\vec{A}) = \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f + f\,\mathrm{div}\,\vec{A}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{A} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$
$\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} + (\mathrm{div}\,\vec{B}) \cdot \vec{A} - (\mathrm{div}\,\vec{A}) \cdot \vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \vec{\Delta}\vec{A}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \vec{A} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$

$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\frac{1}{r}) = \frac{-\vec{r}}{r^3} = \frac{-\vec{u}_r}{r^2}$

Vecteur surface : $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_\Sigma \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}OM}$
Angle solide (en stéradians) : $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{dS}}{r^2} = \frac{dS\,\cos\theta}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ $\quad$ sphère : 4π st
Au sommet de mesure α d'un cône : $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$

$< \cos^2 t >_t = < \sin^2 t >_t = \frac{1}{2}$ $\quad$ $< \cos t \sin t >_t = 0$

Approximation des grandes distances M "loin" de A et B : $r_B - r_A = -a\cos\theta$ avec $a = AB$ et $\theta = \widehat{BOM}$
démo : $r_B^2 - r_A^2 \approx -2ar\cos\theta$ et $r_A + r_B \approx 2a$

Conservation de l'énergie, homogénéité de l'espace, isotropie de l'espace
Conservation locale : $\delta\chi = \delta\chi_\mathrm{e} + \delta\chi_\mathrm{c}$ (échange création)
$\delta\chi_\mathrm{e} = -(\oiint \vec{J}_\chi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S})\mathrm{d}t$ avec $\vec{J}_\chi = \rho_\chi \vec{v}$ $\quad$ $\delta\chi_\mathrm{c} = \iiint_V \sigma_\chi \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$
conservation : $\frac{\partial\rho_\chi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{J}_\chi = \sigma_\chi$

1 Mécanique

Coordonnées cylindriques : $\vec{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}, \dot{z})$ et $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \ddot{z})$ $\quad$ on a : $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\dot{\theta})}{\partial t}$
$(\vec{u_r})' = \dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $(\vec{u_\theta})' = -\dot{\theta}\vec{u_r}$
Coordonnées curvilignes : $\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$ et $\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{N}$ $\quad$ (on a : $\dot{s} = ||\vec{v}||$ et $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$)
$\vec{a_T} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v^2}\right)\vec{v}$ $\quad$ (d'où $\rho = \frac{v^2}{||\vec{a}_N||}$ avec $\vec{a}_N = \vec{a} - \vec{a}_T$)

$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/R} \wedge \vec{A}$
$\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$ $\quad$ (vitesse d'entrainement / relative) $\quad$ avec $\vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$
$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$ $\quad$ (accélération relative / d'entrainement / complémentaire (de Coriolis))
$\vec{a_e} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$
$\vec{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}$
Pour un mouvement de rotation : $\vec{F_{i_e}} = -m\vec{a}_e = m\omega^2\overrightarrow{HM}$
$\vec{F_{i_c}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}$

Force dérivant d'un potentiel $\Leftrightarrow$ conservative
$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p$
$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$ $\quad$ $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}$
Moment cinétique : $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$
Moment d'une force : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ (= $\vec{0}$ si le mouvement est plan)
Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta\mathcal{E}_c = W_{AB}(\vec{F})$
Position d'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ou $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = 0$ $\quad$ stable : $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2} > 0$ / sinon : instable (repos : $\vec{v} = \vec{0}$)
stabilité : poser $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$ $\quad$ $\rightarrow$ DL du TRC

Frottement solide : $R_T = kR_N$ ou $R_T \leq kR_N$ si $\dot{x} = 0$
Frottement fluide : $\vec{F} = -k\vec{v}$
Ressort : $\vec{F} = -k(\vec{l} - \vec{l_0})$ $\quad$ $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Centre de masse G : $M\,\overrightarrow{OG} = \sum_i(m_i\overrightarrow{OA_i})$ $\quad$ $\vec{P} = M\,\vec{V_G}$
Référentiel barycentrique : centré sur G
$\vec{P^*} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{L^*}$ est le même en tout point

Théorème de Kœnig : $\overrightarrow{L_{/O}} = \overrightarrow{L^*} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$ et $\mathcal{E}_{c_{/O}} = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2}MV_G^2$
Deux points : masse réduite du système : $M = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

1.1 Forces centrales

$K = GmM$
Constante des aires : $C = r^2\dot\theta = \|\vec{r_0} \wedge \vec{v_0}\| = \frac{\|\vec{L}\|}{m}$ démo : $a_\theta = 0 = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r^2\dot\theta)}{\mathrm{d}t}$ ou bien $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(O) = \vec{0}$)
Loi des aires (surface balayée) : $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}C\mathrm{d}t$ ($\Leftarrow \mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$) $\rightarrow$ période

Etablir la loi du mouvement : poser $u = \frac{1}{r}$ - éliminer $\dot\theta$ avec $\dot\theta = \frac{C}{r^2}$ - calculer $\dot r$ et $\ddot r$ avec $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$
Formules de Binet :
$v^2 = \dot r^2 + (r\dot\theta^2)^2 = C^2[(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta})^2 + u^2]$ ($\Rightarrow \mathcal{E}_c$)
$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = \frac{-C^2}{r^2}[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u]$

$\mathcal{E}_m^* < 0 : e < 1$: ellipse
$\mathcal{E}_m^* = 0 : e = 1$: parabole
$\mathcal{E}_m^* > 0 : e > 1$: hyperbole
car $a = \mu a_r = \frac{-K}{r^2}$
$\mathcal{E}_p = \frac{-K}{r}$
$\mathcal{E}_m^* = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - \frac{K}{r_0} = \frac{-K}{2a}$ démo : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - \frac{K}{r}$ éliminer $\dot\theta$ avec C calculer $\mathcal{E}_m$ en $r = a + c$ et en $r = a - c$ (où $\dot r = 0$)

$p = \frac{\mu C^2}{K} = \pm a(1 - e^2)$ ($\Rightarrow a$ avec $\mathcal{E}_m$)
$p = \frac{b^2}{a}$ $e = \frac{c}{a}$ $a^2 = b^2 + c^2$
$\vec{U} = \vec{P} \wedge \vec{L} - \mu K\vec{e_r} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$ direction : grand axe, sens foyer $\rightarrow$ périastre ; $\varphi = \arg(U_r + \mathrm{i}U_\theta)$
3^e loi de Kepler : période : $\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{\mu}{K} \approx \frac{4\pi^2}{GM}$ démo : $\int \mathrm{d}S = \frac{1}{2}CT = \pi ab \rightarrow$ au carré puis $C^2 = \frac{b^2K}{a\mu}$ car $p = \frac{\mu C^2}{K} = \frac{b^2}{a}$
Vitesses de libération : $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ et $v_2 = \sqrt{2}v_1$ (car $m\frac{v^2}{r_0} = \mathrm{cst}$)
Vecteur excentricité : $\vec{A} = \vec{e_\theta} - \frac{C}{GM}\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{cst}}$ $\|\vec{A}\| = -e$

Éllipse :
équation pol : $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ cart : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$OF = c$ $FP = a - c$ $OC = b$ $FM + F'M = 2a$ $FA = a + c$
la bissectrice de $\widehat{FMF'}$ est normale à l'ellipse

Conservation : du moment cinétique et de $\mathcal{E}_m^*$

1.2 Oscillateurs

$F = -kX$
$\mathcal{E}_{p(X)} \approx \mathcal{E}_{p(x_0)} + \frac{kX^2}{2}$ avec $X = x - x_0$ avec x_0 : puits de potentiel

Harmonique :
Isochronisme : ω_0 indépendant de X_0 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$
$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}KX_0^2 + \mathcal{E}_{p(x_0)}$
Énergie moyenne : $\overline{\mathcal{E}_c} = \overline{\mathcal{E}_p} = \frac{\mathcal{E}_m}{2}$

Amorti : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$ ($F_{\mathrm{frott}} = -h\dot x$)
$\ddot x + \frac{\omega_0}{Q}\dot x + \omega_0^2 x = 0$
$Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique, $Q = \frac{1}{2}$: critique, $Q > \frac{1}{2}$: pseudo-périodique, $Q \rightarrow \infty$: périodique
Décrément logarithmique (rapport entre deux max successifs) constant
Plan de phase : $\dot x$ en fonction de x
$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = (-h\dot x)\dot x = P_{\mathrm{frott}} < 0$

Frottement solide : $\vec{F} = -h \times \mathrm{sgn}\,\dot x$ s'il y a mouvement, $\vec{F} = \vec{0}$ sinon
oscillations centrés sur $\pm\frac{h}{K}$
Oscillateur harmonique forcé : poser $X_B = x_B - x_{B_{\text{éq}}}$
Résoudre en posant $\underline{X_0} = X_0\,\mathrm{e}^{j\varphi}$ et $q = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Oscillations autour de la pos d'équilibre : intégrer $\mathcal{E}_m = \mathrm{cst}$ avec un DL de l'$\mathcal{E}_p$
$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2}\right)(r - r_{\text{éq}}) = 0$ $\rightarrow$ multiplier par $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)$...

Période des oscillations : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x))}{m}}\mathrm{d}t \quad \rightarrow \quad \frac{T}{4} = \int_0^{T/4} \mathrm{d}t = \ldots$
$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \pi$

1.3 Chocs

Quantités de mouvement : $P_1 + P_2 = \text{cst}$
Élastique : $\mathcal{E}_c = \text{cst}$ ($F_{\text{frott}} \approx 0$) mou : $\mathcal{E}_c \neq \text{cst}$
Cœfficient de restitution : $\overrightarrow{v_1'} - \overrightarrow{v_2'} = -e(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2})$
$0 < e < 1$ $e = 1$: élastique $e = 0$: parfaitement mou

Sur une surface dure : $\vec{F}_{\text{frott}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_T = \overrightarrow{\text{cst}}$; si élastique : $\vec{v}_T' = \vec{v}_T$ et $\vec{v}_N' = -\vec{v}_N$

Choc élastique : $\Delta\vec{p} = 2\vec{p}_\perp$

Il y a conservation : de la quantité de mvt ; si le choc est élastique : de l'$\mathcal{E}_c$ du syst

1.4 Mécanique du solide

Formule de Gibbs : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$
Champ équiprojectif $\Leftrightarrow$ antisymétrique ($\vec{u} \cdot \mathcal{L}(\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \mathcal{L}(\vec{u})$) $\Rightarrow$:
Torseur : $\overrightarrow{\mathcal{M}_P} = \overrightarrow{\mathcal{M}_Q} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$
Vecteur lié : $(A, \vec{u}) \Rightarrow$ glisseur : $\overrightarrow{G_P} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}$ couple : torseur uniforme
Comoment (ici noté $\otimes$) (indép de M) : $\overrightarrow{\mathcal{M}} \otimes \overrightarrow{\mathcal{M}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_M} \cdot \vec{R}' + \overrightarrow{\mathcal{M}'_M} \cdot \vec{R}$

Centre d'inertie G : $\int \overrightarrow{GM}\ \mathrm{d}m = \vec{0}$ et $m\overrightarrow{OG} = \int \overrightarrow{OM}\ \mathrm{d}m$
Théorèmes de Guldin :
– $\mathcal{A}_{\text{surf engendrée par la courbe}} = \mathcal{L}_{\text{courbe}} \times \mathcal{L}_{\text{cercle engendré par } G}$
– $\mathcal{V}_{\text{engendrée par la suf}} = \mathcal{A}_{\text{surf}} \times \mathcal{L}_{\text{cercle engendré par } G}$

Torseur cinématique (des vitesses) : $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$
Torseur cinétique : $\vec{\sigma}_A = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}_M\ \mathrm{d}m$ $\vec{R}_c = \vec{p} = m\vec{v}_G$ $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_A^*$
Torseur dynamique : $\vec{\delta}_A = \int \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}_M\ \mathrm{d}m$ $\vec{R}_d = m\vec{a}_G$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \left[\left(\frac{\mathrm{d}\vec{j}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \vec{k}_1\right]\vec{i}_1 + \left[\left(\frac{\mathrm{d}\vec{k}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \vec{i}_1\right]\vec{j}_1 + \left[\left(\frac{\mathrm{d}\vec{i}_1}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \vec{j}_1\right]\vec{k}_1 \quad \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{i}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{i}_1}{\mathrm{d}t}$...

Opérateur d'inertie : $\vec{\sigma}_O = \mathcal{J}_{(O)}\vec{\omega} = \int \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})\ \mathrm{d}m$
coef diag : $I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\ \mathrm{d}m = \int d_\Delta^2 \mathrm{d}m$ $I_{xy} = -\int_S xy\,\mathrm{d}m$
Moment d'inertie : $\mathcal{J}_\Delta = \vec{u} \cdot \mathcal{J}_{(O)}\vec{u}$ rotation autour d'un axe : $\sigma_\Delta = \mathcal{J}_\Delta \omega$
Th d'Huygens : $\mathcal{J}_\Delta = \mathcal{J}_{\Delta_G} + md^2$ (Δ / Δ_G)
Moments d'inertie :
– sphère : $J_{\Delta_G} = \frac{2}{3}mR^2$
– boule : $J_{\Delta_G} = \frac{2}{5}mR^2$
– disque : $J_{\Delta_G} = \frac{1}{2}mR^2$
– cylindre [creux] : $J_{\Delta_G} = [\frac{1}{2}]mR^2$
– barre : $J_{\Delta_G} = \frac{1}{12}ml^2$

Calcul de J pour une sphère : $\iiint d_\Delta^2\ \mathrm{d}m = \frac{2}{3}\iiint r^2\ \mathrm{d}m$

Th de Kœnig : $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{v}_G$ $\vec{\delta}_A = \vec{\delta}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^*}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{a}_G$
si A fixe (ds $\mathcal{R}$ galil) ou $A = G$ ou $\vec{v}_A / \vec{v}_G$: $\vec{\delta}_A = \frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A}{\mathrm{d}t}$
svt : $\delta_A = \frac{\mathrm{d}\sigma_A}{\mathrm{d}t} = \mathcal{J}\dot{\omega} = \mathcal{J}\ddot{\theta}$
Th de Kœnig (att : l'$\mathcal{E}_c$ dépend du réftl) : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(\vec{v}_G \cdot \vec{R}_c + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}_G) = \frac{1}{2}(\vec{v} \otimes \vec{\sigma}) = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathcal{J}_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + \mathcal{E}_{C_K}$
Th de Kœnig : $\mathcal{J}_{(O)}\vec{\omega} = \mathcal{J}_{(G)}\vec{\omega} + m\overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OG})$

Th de la résultante cinétique (TRC) : $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$
Th du moment cinétique (TMC) : $\vec{\delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$

Th de l'énergie mécanique (TEM) : $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}}$ (ds un réftl galil ou barycentrq)

Écrire le TMC au point d'application des forces de frottement ($\rightarrow \vec{\mathcal{M}}(\vec{R}) = \vec{0}$)

Ds un réftl galil : $\Delta\mathcal{E}_m = W_{\text{NC}}$ syst conservatif : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cst}$
$dV = \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot d\vec{l}$ $dW = -dV$ $\Delta W = -\Delta V$
La puiss des actions int est indép du réftl choisi

Moment d'une force : $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \int \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_O + (\int d\vec{F}) \wedge \overrightarrow{OA}$
Puissance (dépend du réftl) : $P_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_M + \vec{\mathcal{M}}_M(\vec{F}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v} \otimes \vec{\mathcal{M}}(\vec{F})$

Champ de pesanteur : $\vec{\mathcal{M}}_O = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GO}$
Force pressante : $d\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P d\tau$ svt : $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \rho\vec{g} = \frac{M}{V}\vec{g} = \frac{MP}{RT}\vec{g}$
Condition de roulement sans glissement : $\vec{v}_I = \vec{0}$ $\rightarrow \dot{x} + r\dot{\theta} = 0$
Lois de Coulomb ($\|\vec{R}_t\| \leq f\|\vec{R}_n\|$) :
– si glissement : $\vec{R}_t$ opposé à $\vec{v}$ $\|\vec{R}_t\| = f_d\|\vec{R}_n\|$
– sinon : $\|\vec{R}_t\| = f_s\|\vec{R}_n\|$

Liaison parfaite : puiss des actions de contact = 0

2 Électrocinétique

Densité particulaire de porteurs de charge : $n_m = \frac{dN}{d\tau}$
Densité de charge mobile : $\rho_m = qn_m$
Densité de courant en un point : $\vec{J} = \rho_m\vec{v}$
Charge : $dQ = (\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS})dt$
Intensité : $dI = \frac{dQ}{dt} = \vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}$

Conservation de la charge : $\text{div}\, \vec{J} + \frac{d\rho_m}{dt} = 0$
Loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ γ : conductivité
$I = J\Sigma = \gamma\Sigma E$
$U = El = RI$ avec $R = \frac{l}{\gamma S} = \frac{\rho l}{S}$ $\rho = \frac{1}{\gamma}$: résistivité
démo : $U = \int dV = -\int \overrightarrow{\text{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{dl} = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{1}{\gamma}\int \vec{J} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{1}{\gamma S}Il$
Conductance : $G = \frac{1}{R} = \frac{\gamma S}{l}$
$\Delta V = RI$
Résistances : série ($R = R_1 + R_2$) / parallèle ($G = G_1 + G_2$)

2.1 Réseaux linéaires

Lois de Kirchhoff :
– loi des nœuds : $\sum_i \varepsilon_i I_i = 0$
– loi des mailles : $\sum_i \varepsilon_i R_i I_i = \sum_k \varepsilon_k e_k$

Théorème de superposition : la solution du système global est égale à la somme des solutions à un générateur (+ générateurs dépendants)
Théorème de Millman : $V_N = \frac{\sum_i V_{A_i}/R_i}{\sum_i 1/R_i}$ ($V_N = \frac{\sum V_i/R_i + I_j}{\sum 1/R_i}$)
Équivalence triangle-étoile : $R'_A = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$ démo : considérer les cas où $i = 0$ ds une branche de l'étoile

Symétrie : un point et son symétrique sont au même potentiel → il ne passe pas de courant entre entre eux
Antisymétrie : deux points sur l'axe sont au même potentiel...

Théorème de Thévenin :
– e_{th} : U en sortie ouverte
– R_{th} : $R_{\text{éq}}$, générateurs éteints (sauf commandés)

Pont diviseur de tension : $U_{AB} = e\frac{r}{R+r}$

Matrice de transfert : $(u_s, i_s) = M(u_e, i_e)$ matrice impédance : $(u_s, u_e) = M(i_s, i_e)$

2.2 Réseaux linéaires en régime variable

Condensateurs : $q = Cu$ $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $W_E = \frac{1}{2}CU^2$
Bobines : $U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $W_B = \frac{1}{2}LI^2$
En régime continu C ⇔ -/- et L ⇔ — $\neq \omega \to \infty$
Continuité de la tension aux bornes de C et du courant qui traverse L

Régime variable : $\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}i^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 = 0$
$Q < \frac{1}{2}$: apériodique, $Q = \frac{1}{2}$: critique, $Q > \frac{1}{2}$: pseudo-périodique, $Q \to \infty$: périodique
Décrément logarithmique constant

2.3 Régime sinusoidal forcé

Impédances : R C : $\frac{1}{jC\omega}$ L : $jL\omega$
$\frac{d\underline{U}}{dt} = j\omega\underline{U}$
Forme canonique : $\underline{I} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ et $\underline{U} = \frac{E}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{F}{F_0}$
svt : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Q : facteur de qualité
Fonction de transfert (gain en tension à $i_s = 0$) : $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$
Gain : $G_{dB} = 20\log\|\underline{H}\|$ phase : $\varphi = \arg(\underline{H})$
Bande passante : $G_{(-3\text{ dB})} = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ $(20\log(\frac{1}{2}) \approx -3)$ $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \frac{\Delta F}{F_0}$

Séries de Fourier : $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$
$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$ (parité !) $\omega = \frac{2\pi}{T}$
cplx : $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$ $c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}\,b_n)$ et $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}\,b_n)$ $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t$

$\underline{I} = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ $\underline{U} = U_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$
Puissance moyenne : $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t = I_{\text{eff}}U_{\text{eff}}\cos\varphi$
Puissance complexe : $\underline{P} = \frac{1}{2}\underline{U}\cdot\underline{I}^*$ (puissance active : $\overline{P} = \Re(P)$, puissance réactive : $\Im(P)$)

Amplificateur opérationnel :
$i_e^+ \approx i_e^- \approx 0$ $v_s = \mu(v_e^+ - v_e^-) = \mu\varepsilon$ μ : gain $v_s \leq v_{s\max} \Rightarrow v_e^+ - v_e^- \approx 0$
fonctionnement linéaire : $\tau\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s = \mu\varepsilon$
appliquer le th de Millman aux bornes d'entrée
rétroaction : tjrs sur la borne ⊖ pour être stable
$\mu \approx 10^5$ $\tau \approx 10^{-2}\,\text{s}$ $R_e \approx 10^{11}\,\Omega$ $R_s \approx 1\,\Omega$ $V_{\text{sat}} \approx 15\,\text{V}$ $i_{\max} \approx 10\,\text{m V}$
MONTAGES CLASSIQUES AVEC AO...

3 Ondes életromagnétiques

3.1 Équations de Maxwell

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$
$\mu_0\varepsilon_0c^2 = 1$ $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\text{SI}$
Vecteur densité de courant : $\vec{J} = \rho\vec{v} = \sum n_iq_i\vec{v}$ (ρ : densité volumique de charge)

Conservation locale de la charge : $\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ $\Leftarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = -\oiint_\Sigma \vec{J}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{\partial}{\partial t}(\iiint_V \rho\,\mathrm{d}\tau)$ ou $\operatorname{div}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = 0$

Potentiel vecteur associé à $\vec{B}$: $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$ car $\operatorname{div}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = 0$
Potentiel associé à $\vec{E}$: $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ car $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = 0$

$\Delta V = -\operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Jauge de Coulomb (→ statique) : $\operatorname{div}\vec{A} = 0$
Jauge de Lorentz (→ propagation) : $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$

Par une transfo de Galilée ($\vec{v} = \overrightarrow{\text{cst}}$ coli à $\vec{i}$) : $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}'$

$\frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial.}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ or $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$ donc $\frac{\partial.}{\partial t'} = \frac{\partial.}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$ avec $\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}'$

ρ : invariant $\vec{f} = \vec{f}'$

Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow$ th de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Maxwell-Flux : $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ à flux conservatif : $\oiint_\Sigma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ loi de Lenz : $\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_\Sigma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow$ th d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 I$

À travers une surface chargée : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$ $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{n}_{12}$

3.2 Phénomènes vibratoires

Onde monochromatique : $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (quasi : $A_0(t) \approx$ cst sur une période)

Addition de 2 ondes isochrones : $V^2 = VV^* = V_{0_1}^2 + V_{0_2}^2 + 2V_{0_1}V_{0_2} \cos \Delta\varphi$

Onde progressive : dépend de $t \pm \frac{x}{c}$

Onde plane progressive : $\psi(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$ monochromatique : $\psi = \psi_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right)\right] = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$

les ondes planes se mettent ss la forme : $\psi(x,t) = f(t - \frac{x}{c}) + g(t + \frac{x}{c})$

Onde sphérique : $\psi(r,t) = \frac{\psi_0}{r} \cos[\omega(t - \frac{r}{c})]$

Onde stationnaire : $\psi(x,t) = f(x)g(t)$

Sont solution de l'éq des ondes : $\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

démo : mq $\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} \Rightarrow \phi = (r\psi)$ sol de l'éq en dim 1

Éq de Maxwell ds le vide : $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$ $\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0}$ $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On en déduit : $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ (avec $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \operatorname{div} \vec{F} - \vec{\Delta}\vec{F}$)

$\vec{k}$: vecteur d'onde ; coli à la direction de propagation $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

c : célérité ds le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ vitesse de groupe : $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$

$\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = k_B T$

Milieu homogène : $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ $\mu = \mu_r \mu_0$ $c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$

Indice de réfraction : $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ $n = \frac{c}{v} > 1$ air : $n = 1$, verre : $n \approx 1,5$

Milieu non homogène : $\vec{\Delta}\vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ $\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ $v(\vec{r})$

Sols ss la forme $\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r}) \exp[\mathrm{i}(\omega t - \varphi(\vec{r}))]$ avec $A(\vec{r}) \approx$ cst devant $\varphi(\vec{r})$ (phase) : $\frac{\Delta A}{A} \ll \|\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi\|^2$

Approximation de l'optique géom : $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi\| = \frac{\omega}{v}$

d'où : $\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$ $\|\vec{k}\| = \|\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi\| = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi \perp$ surf équiphases

Th de Malus : les rayons sont perpendiculaires aux surfaces d'onde

Principe du retour inverse de la lumière

Chemin optique : $\mathrm{d}L = n\, \mathrm{d}s$ $(AB) = c\, \Delta t$

Principe de Fermat : la lumière emprunte le plus court trajet possible ($\mathrm{d}L = 0$)

Éq des rayons lumineux $\frac{\mathrm{d}(n\vec{u})}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\text{grad}}\, n$

démo : mq $\overrightarrow{\text{grad}}\, L = n\vec{u}$ avec $\mathrm{d}L = \overrightarrow{\text{grad}}\, L\, \mathrm{d}\vec{r}$ et $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{u}\, \mathrm{d}s$ puis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\overrightarrow{\text{grad}}\, L) = \overrightarrow{\text{grad}}(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s})$

Repère de Frénet : $\frac{1}{R} = \vec{N} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, n$

Polarisation (OPPM) : $\varphi = \varphi_y - \varphi_z$ avec $E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz)$ et $E_y = E_{y_0} \cos(\omega t - kz - \varphi)$:

- $\sin \varphi > 0$: polarisation elliptique gauche (sens trigo) $\neq \sin \varphi < 0$: droite
- $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et $E_{x_0} = E_{y_0}$: polarisation circulaire gauche (+) / droite (−)
- $\varphi = 0$ ou π : polarisation rectiligne

Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ $\mathcal{P} = \oiint \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $< \mathcal{P} >= \oiint < \vec{\Pi} > \mathrm{d}S$

Bilan énergétique : $-\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{cédée ds } V} + \mathcal{P}_{\text{cédée à l'ext}} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, \mathrm{d}\tau + \oiint_\Sigma \vec{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$

local : $-\vec{J} \cdot E = \operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial t}$

Pression électrostatique : $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ démo : $\Pi_E = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}(\frac{\vec{E}}{2}) = \sigma \times \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{d}S}$
Pression magnétostatique : $\vec{J_S} \wedge \frac{\vec{B}}{2}\ \mathrm{d}S = -\frac{1}{2}\mu_0 J_S^2\ \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ démo : $\Pi_B = \vec{J_S} \wedge \frac{\vec{B}}{2} = \frac{\mu_0}{2}\vec{J_S} \wedge (\vec{J_S} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}S}) = -\frac{\mu_0}{2}J_S^2\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

3.2.1 Réflexion

Sur un métal $\perp$: $\vec{E} = 2E_0 \sin kx \sin \omega t\ \vec{e}_y$ (onde stationnaire) démo : $E_{/} = 0$
MF : $\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\cos kx \cos \omega t\ \vec{e}_z$
$< W_{\mathrm{em}} >_t = \varepsilon_0 E^2$ (onde incidente : $W_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$) démo : $W_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$
$\sigma = 0$ $\vec{J_S} = \frac{2E_0}{\mu_0}\cos \omega t\ \vec{e}_y$
pression de radiation ($\vec{B}' = \frac{\vec{B}}{2}$) : $P_{\mathrm{m}} = \varepsilon_0 E^2\ \vec{e}_x$

Corpusculaire : photon : $\mathcal{E} = h\nu$ $\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{n}$ $W_{\mathrm{em}} = \mathcal{N}h\nu$ $\Delta\vec{p} = \frac{h\nu}{c}(\vec{n}_2 - \vec{n}_1)$ $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \sim$ force

Isolant : $\sigma = 0$ et $\vec{J_S} = \vec{0}$ à l'interface $\rightarrow$ continuité de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Calcul de $\vec{B}$ à partir de $\vec{E}$: MF : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et vice versa avec MA
Calcul de $\vec{J_S}$ et σ : avec $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ et $\vec{B} = \mu_0\vec{J_S} \wedge \vec{n}$

3.2.2 Propagation

$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ $\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ démo : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$
$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$
Jauge de Lorentz : $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

OP : $F(u,v) = f(x,t)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial.}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial.}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial.}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial.}{\partial t}\right) f = 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ avec $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$
OP : $(\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0)$: trièdre direct
Structure locale d'OP : la norme est $\approx$ indép de r et $\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \wedge \vec{E}$
OPP : $\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$ $A_x = \frac{V}{c}$ + cst (jauge de L) $\vec{E} \perp \vec{B}$ $B = \frac{E}{c}$
$\vec{\Pi} = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{1}{c\mu_0}E^2\ \vec{n} = c\varepsilon_0 E^2\ \vec{n} = \frac{c}{\mu_0}B^2\ \vec{n}$
$W_{\mathrm{em}} \sim \frac{\text{énergie}}{\text{volume}} \sim \pi = \varepsilon_0 E^2$ (pression) $\frac{\delta\vec{p}}{\delta t} = \pi\ \mathrm{d}\Sigma\ \vec{n}$
$W_{\mathrm{m}} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$ $\vec{\Pi} = cW_{\mathrm{m}}\vec{n}$
Densité volumique de quantité de mvt : $\vec{g} = \varepsilon_0\vec{E} \wedge \vec{B}$

OPPMPR : $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]$
$< \vec{\Pi} >_t = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2$
$\frac{\partial.}{\partial t} = \mathrm{i}\,\omega$ $\vec{\nabla} = -\mathrm{i}\,\vec{k}$ démo : $\frac{\partial.}{\partial x} = \frac{-1}{c}\frac{\partial.}{\partial t}$
Revenir en notation réelle pour calculer $\vec{\Pi}$ ou bien : $< \vec{\Pi} >_t = \Re\left(\frac{1}{2\mu}\vec{E} \wedge \vec{B}^*\right)$

Milieux isolants : $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ et $\mu = \mu_r\mu_0$ $n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$
Dispersion : $c' = \frac{c}{n}$ avec $n(\omega)$
OP : $\vec{\Pi} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\ \vec{n}$

Loi d'Ohm locale : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$
Éq de propagation : $\vec{\Delta}E - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ $\vec{\Delta}B - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$
démo : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \ldots$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \ldots$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Relation de dispersion : $k = f(\omega)$ avec l'éq de propagation en cplx
$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2(1 - \mathrm{i}\,\frac{\gamma}{\varepsilon\mu})$
facteur de qualité : $Q = \frac{|\text{courant de déplacement}|}{|\text{courant de conduction}|} = \frac{|\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}|}{|\vec{J}|}$ $k^2 = k_0^2(\varepsilon_r\mu_r)(1 - \frac{\mathrm{i}}{Q})$
att : a priori, $c \neq \frac{\omega}{k}$
Onde évanescente : onde stationnaire atténuée ($\Leftrightarrow k \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$)
Effet de peau : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\omega\gamma}}$ démo : relation de dispersion en négligeant le courant de déplacement en $(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$ $\rightarrow E = \ldots \times \mathrm{e}^{x/\delta}$

Ds un plasma, γ avec : $\vec{J} = \gamma\vec{E} = \sum q_i v_i$

3.2.3 Rayonnement

Jauge de Lorentz : $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$
Éq des potentls : $\vec{\Delta}\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$ $\quad \Delta V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$
Solution des potentiels retardés : $V(\vec{r'}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}\tau$ $\quad \vec{A}(\vec{r'}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}(t-\frac{r}{c})}{r}\mathrm{d}\tau$

Dipôle oscillant : $q = q_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$ $\quad \vec{s} = \overrightarrow{O_-O_+}$ $\quad \vec{p} = q_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,\vec{s}$
$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\dot{\vec{p}}$ (déf) $\quad V(\vec{r}, t) = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r^2} + \frac{\dot{p}}{rc}\right)$ (avec Lorentz et $\frac{\partial\cdot}{\partial z} = \frac{\partial\cdot}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial\cdot}{\partial r}\cos\theta$ ou déf)
$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0\sin\theta}{4\pi}\left(\frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc}\right)\vec{e}_\varphi$ (avec $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$) $\quad E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2}\right)$ (avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$)

3.2.4 Propagation guidée

À l'intérieur du guide d'ondes : $\vec{E} = \vec{E}_0(x, y)\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]$ $\quad \vec{B} = \vec{B}_0(x, y)\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)]$ $\quad \rho = 0,\ \vec{J} = \vec{0}$
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}, \frac{\partial\cdot}{\partial y}, -\mathrm{i}\,k\right)$
Mq E_{0x}, E_{0y}, B_{0x}, B_{0y} s'expriment en fonction de E_{0z} et B_{0z} et de leurs dérivées spaciales avec MF et MA
Écrire les éq de propagation ($\Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$ et en B_z) en cplx
$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_{0z}$...

Ondes transversales électriques : $E_{0z} = 0$; chercher une sol de l'éq de propagation ss la forme $B_{0z} = B_{00}X(x)Y(y)$
$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = \chi_x^2$ et $\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = \chi_y^2$ avec $\chi_x^2 + \chi_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ ... $\chi_x = \frac{n\pi}{a}$ ...
Conditions aux limites : $\vec{E_t} = \vec{0}$, $\vec{B_n} = \vec{0}$, $\vec{E}\wedge\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{J_s}\wedge\vec{n}$
$\vec{E} = E(x, y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}$ $\quad \operatorname{div}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow E(x, y) = E(x)$ $\quad$ éq de propagation → solution

Modes propres : $l = p\frac{\lambda_p}{2}$ d'où $k_p = \frac{p\pi}{l}$

3.3 Optique

Suivant λ(nm) : 0.4 (violet) – 0.56 (jaune) – 0.6 (rouge) – 0.8 : visible
γ – rayons X (10^{-10} m) – ultraviolet … infrarouge – microondes – centimétrq – radio (> 1 km)

Réflexion : $\theta_i = \theta_r$ $\quad$ réfraction (loi de Descartes) : $n_1\sin i_2 = n_2\sin i_2$
continuité des composantes T et N ← Maxwell
Incidence Brewster : $\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$: seule la composante de $\vec{E}\perp$ au plan d'incidence est transmise par réflexion

Principe de Frénet → $n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2$ coli à $\vec{N}$ $\quad$ démo : introduire O origine ds $\mathrm{d}L = 0$ entre A_1 et A_2

Grossissement : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ $\quad$ grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
Relation de Lagrange-Helmotz : $\gamma G = \frac{n'}{n}$
Stigmatisme : deux rayons entrant / sortent /
pr deux rayons / : $L(B_0B_i) - L(A_0A_i) = \mathrm{cst} = n_i\vec{u}_i\cdot\overrightarrow{A_iB_i} - n_0\vec{u}_0\cdot\overrightarrow{A_0B_0}$
Sinus d'Abbe (aplanétisme, vertical) : $n\,AB\sin\alpha = n'\,A'B'\sin\alpha'$
Condition de Hershell (stigmatisme longitudinal) : $n\,AC\sin^2\frac{\alpha}{2} = n'\,A'C'\sin^2\frac{\alpha'}{2}$
Objet / image réel / virtuel $\quad$ focale, plan focal

Lorsqu'on entre ds un milieux plus réfringeant, le rayon se rapproche de la normale

Dioptre plan : $A'H = \frac{\tan i}{\tan r}AH \approx \frac{n_2}{n_1}AH$
Lame à faces parallèles : $AA' = e\left(\frac{n'-n}{n'}\right)$
Prisme : $A = r + r'$
déviation : $(\widehat{\text{rayon entrant, sortant}})$ $\quad D = A - (i + i')$ $\quad$ angles faibles : $D = (n-1)A$
condition d'émergence : $A - \lambda \leq r \leq \lambda$ avec $\sin\lambda = \frac{1}{n}$ et $A \leq 2\lambda$
Penser à : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a-b}{a'-b'}$

Focale : $f = \overline{HF}$ et $f' = \overline{HF'}$
$x = \overline{FA}$, $x' = \overline{F'A'}$ $\quad p = \overline{HA} = f + x$
Vergence : $V = \frac{-n}{f} = \frac{n'}{f'}$ (convergente : $V > 0$)

Dioptre sphérique :
$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$ $\quad \gamma = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\quad xx' = ff'$ $\quad f' = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$ $\quad \frac{f}{f'} = -\frac{n'}{n}$

$\frac{n'}{CA'} - \frac{n}{CA} = \frac{n'-n}{CS}$ $\gamma = \frac{n}{n'} \frac{CA'}{CA}$
Lentille mince ($S_1 \approx S_2 \approx S$) :
$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$ $\gamma = \frac{-f}{x} = \frac{-x'}{f'}$ $xx' = ff' = -f'^2$ $f = -f'$ $\frac{1}{f'} = (n-1)(\frac{1}{SC_1} - \frac{1}{SC_2})$

Formule de Gullstrand : $V = V_1 + V_2 - dV_1V_2$ $(\Leftarrow \gamma G = \frac{n'}{n})$

Tracé des rayons :
– entre / à l'axe → sort en passant par F' et vice-versa
– les rayons passant par O ne sont pas déviés
– des rayons / focalisent sur le plan focal image

Lunette réglée à l'infini : entre / → sort /

Doublet (a, b, c) : deux lentilles : $\frac{f'_1}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f'_2}{c}$
Plan principal objet : rayon horizontal ∩ le rayon émergeant
Points principaux (H) : $\gamma = 1$, antiprincipaux (H^*) : $\gamma = -1$, nodaux : $G = 1$

Mirroir : $n' = -n$ plan : $R = SC = \infty$

3.4 Interférences lumineuses

Source cohérente : $\Delta\varphi = \text{cst}$ m̂ source et $\delta \ll L$ (L : lg de cohérence)
$I = \frac{1}{2} < \psi\psi^* >$
2 sources cohérentes : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$ m̂ I_0 : $I = 2I_0(1 + \cos\varphi)$
Visibilité (contraste) : $V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$
Interfrange : $\varphi = 2\pi$ ou $\delta = \lambda$
Ordre d'interférence : $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$
Onde sphérique : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$ $\Delta\varphi = \vec{k} \cdot \overrightarrow{S_1 S_2}$
OP de m̂ amplitude : vecteur interférence : $\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ $\varphi = \vec{K} \cdot \vec{r}$ interfrange : $i = \frac{\lambda}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}$
Utiliser le th de Malus

Loi de Malus : $I \propto \cos^2\theta$ (intensité lumineuse transmise)

Trous d'Young : $\delta = \frac{sX}{D}$ $i = \frac{\lambda D}{s}$ (D "assez grand")
Interférence à 2 ondes de m̂ amplitude : $I = \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \cos(2\pi\frac{\delta}{\lambda})\right]$
Fente de largeur l : $I(M) = \frac{I_0}{l}\int_{-l/2}^{l/2} I\mathrm{d}y$
Avec spectre : $I = \int_{\nu_{\text{inf}}}^{\nu_{\text{sup}}} kI_\nu(\nu)[1 + \cos(\frac{2\pi\delta\nu}{c})]\mathrm{d}\nu$
caractère non monochromatique insensible si : $2\pi\delta\frac{\Delta\nu_{1/2}}{c} \ll 2\pi$ $\Delta\nu_{1/2} \ll \frac{c}{\delta}$ $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}} \gg \delta$

Modélisations du spectre de raies ($\mathrm{d}I = kI_\nu(\nu)\mathrm{d}\nu$) :
– rectangle
– lorentzienne : $I_\nu(\nu) = \frac{1}{1+[2\pi\tau_c(\nu-\nu_0)]^2}$ (gaz à haute pression)
– gaussienne : $I_\nu(\nu) = \exp\left(-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ (effet Doppler)

sinc : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ fonction d'Airy : $x \mapsto \frac{1}{1+M\sin^2(\frac{x}{2})}$ poser $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$ (nombre d'onde)
$\int_{-a}^{a} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{-a}^{a} = 2a\,\text{sinc}\,ka$ faire des changements de var pr s'y ramener max pour $x \approx (2p+1)\frac{\pi}{2}$
Longueur de cohérence temporelle l_t : D qui annule la première fois la visibilité

Coef de réflexion (reste ds 1) : $r_{12} = \frac{\psi_r}{\psi_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ transmission : $t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$
$T = t^2$ $R = r^2$ pas de pertes : $T + R = 1$
⇒ attention au déphasage de π si $r_{12} < 0$ (ex : air / verre)

Michelson : lame d'air (à l'infini) / coin d'air
Ondes transmises à travers une lame pleine : $\delta = 2ne\cos r$ lame d'air : $\delta \approx 2e \approx 2\alpha x$
Lame pleine à l'infini : $I = \frac{I_{\max}}{1+M\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2ne\cos r$ anneaux : $\cos r = \frac{p\lambda}{2ne}$
figures d'interférence : avec $i \approx nr$ r_p avec $\cos r_p \approx 1 - \frac{r_p^2}{2}$ dans $\varphi = 2p\pi$
Anneaux de Newton : $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}2e + \pi$ $e \approx \frac{x^2}{2R}$

Réseau de N fentes en incidence normale à l'infini : $I(M) = NI_0 \left(\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{N\sin(\frac{\varphi}{2})}\right)^2$

Pouvoir de résolution (sépare les lg d'onde) : $PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$
Dispersion en différence de phase : $D_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}$

Battements en intensité : utiliser $\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

Principe de Huygens-Fresnel : diffraction : chaque pt atteint par une onde se comporte comme une src secondaire d'onde sphérique de m̂ pulsation que l'onde incidente et d'amplitude proportionnelle ; rapidement ≈ plane
$\psi(P) = \iint_\Sigma \psi(M) Q \frac{\exp(\mathrm{i}\, kR)}{R}\,\mathrm{d}S \qquad [Q] = L^{-1}$
Diffraction de Fraunhoffer : à l'infini + dioptre plan
$R = \|\overrightarrow{MP}\| \approx r(1 - \frac{xX+yY}{r^2}) \qquad r = \|\overrightarrow{OM}\| \quad M(x,y) \quad P(X,Y) \qquad Q$ indép de R (car R grand)
Transmittance du diaphragme : $t(x,y) = \frac{\psi(M)}{\psi_0}$
$\psi(P) = \frac{Q}{R} \iint_\Sigma \psi_0 t(x,y) \exp(-\,\mathrm{i}\,\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} = \frac{2\pi}{\lambda}(ux+vy)$ avec $u = \frac{X}{r}$ et $v = \frac{Y}{r} \qquad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{X}{r}\vec{e}_x + \frac{Y}{r}\vec{e}_y + \frac{Z}{r}\vec{e}_z)$
Max relatif de lumière : $u_p = p\frac{\lambda}{a}$
Réseau la transmittance ($\in \mathbb{C}$) varie périodiquement
Déphasage de rayons arrivant / : $\varphi = \vec{k}_0 \cdot \overrightarrow{OM}$

Fente rectangulaire en diffraction : $I(M) = KI_0(ab)^2 \,\mathrm{sinc}^2[\frac{\pi}{\lambda}(\alpha-\alpha_0)a]\,\mathrm{sinc}^2[\frac{\pi}{\lambda}(\beta-\beta_0)b]$
Réseau de fentes / en transmission : $\psi(P) = K\psi_0 \iint t(x,y)\exp[-\,\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\overrightarrow{OM}]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ car $\psi(M) = \psi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{k}_0\cdot\overrightarrow{OM}}$
$$I = I_0\,\mathrm{sinc}^2[\frac{\pi\varepsilon}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha_0)]\left[\frac{\sin(\frac{N\phi}{2})}{\sin(\frac{\phi}{2})}\right]^2$$

Formule des réseaux ($\varphi = 2\pi p$) :
- en transmission : $\sin\alpha - \sin\alpha_0 = p\frac{\lambda}{a} = pn\lambda$
- en réflexion : $\sin\alpha + \sin\alpha_0 = p\frac{\lambda}{a}$

a : distance entre 2 fentes $\qquad n$: nb de fentes par unité de lg
Dispersion angulaire : $\mathcal{D} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda}$
Angle de déviation max : $D(\alpha_0) = \alpha - \alpha_0$ maximal $\qquad kn\lambda = 2\sin(\frac{D_m}{2})$

4 Champs en $\frac{1}{r^2}$

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

4.1 Électrostatique

$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi 10^9}$ SI $\approx 8.85\cdot 10^{-12}$ SI
Charge volumique : $\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$
Densité surfacique de charge : $\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$
Densité linéique de charge : $\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$
Conductivité γ : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm locale)

Utiliser les symétries / antisymétries $\qquad$ th de superposition

Champ électrique : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{AB}}$

Plan infini : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$
Disque : $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)$

Le champ dérive d'un potentiel / la force dérive de l'énergie potentielle
$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ (exprimé ds le repère local en cyl)
Circulation : $dC = \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{d}V \qquad C = -\Delta V$
Potentiel électrostatique : $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{cst}$ $\qquad$ diverge lorsqu'il y a des charges à l'infi ni
Énergie potentielle électrostatique : $\mathcal{E}_p = qV$
$\delta W = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -q\,\mathrm{d}V$

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, dans le sens des potentiels décroissants

Flux de $\vec{E}$: $\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$
Pour une charge ponctuelle : $\mathrm{d}\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$
Théorème de Gauss : flux à travers une surface fermée : $\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ $\quad(\Phi_{\vec{\mathcal{G}}} = 4\pi G M_{\text{int}})$
$\Rightarrow \oint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{d}S} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \to E \to V + \text{cst}$ (cst : par continuité / par le potentiel en O)

Théorème de Gauss local (éq de Poisson) : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
Unicité de la solution à l'éq de Laplace ($\Delta V = 0$)
$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\text{cart}} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{\text{cyl}}$
chercher les sol ss la forme : $V(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ $\quad$ svt : $f(r) = Cr^\alpha$

Méthode des images électriques : placer des autres charges pour "simuler" une équipot (métal)
charge q en B, sphère (O, R) $V = 0 \Leftrightarrow -\lambda q$ placée en A tq : $d = OA = \frac{R^2}{OB}$ et $\lambda = \frac{R}{d}$

Lignes de champ : $\vec{E} = K\overrightarrow{\mathrm{d}l} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}r}{E_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{E_\theta}$
Équipotentielles : $V = \text{cst}$ $\quad$ ou $\quad \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$
Lorsqu'on traverse une surface chargée, discontinuité du champ normal : $\vec{E}_2 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$
Th de Coulomb : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_e$ $\quad (\Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}_e)$
Positions de Gauss : intersection avec les axes ($\theta = \frac{n\pi}{2}$)

Taylor de $\frac{1}{PM}$ au voisinnage de O :
- distribution pôlaire : $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ et $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_{GM}}$
- distribution dipôlaire ($\sum_i p_i = 0$ et $G_- \neq G_+$) : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
- distribution quadripôlaire ($\sum_i p_i = 0$ et $G_- = G_+$) : calculer AM^2 puis $\frac{1}{AM} = \left(\overrightarrow{AM}^2\right)^{-1/2}$, faire un DL

Énergie potentielle (W pr amener les charges à l'∞) : $W_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$ $\quad$ (V_i : V en i par les $q_{i\neq j}$)
$W_{\text{élec}} = \frac{1}{2}\iiint_V \rho V \,\mathrm{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2 \,\mathrm{d}\tau$

Dipôles électrostatiques :
Moment dipôlaire : $\vec{P} = Q\overrightarrow{G_-G_+}$
$V = \frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{Q\, G_-G_+\, \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \vec{E} = \left(\frac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \frac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)$
Écriture intrinsèque : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{P}r^2}{r^5}\right)$
Énergie potentielle du dipôle : $W_d = Q(V_A - V_B) = -\vec{P} \cdot \vec{E}$
Force exercée par le champ sur le dipôle : $\vec{F} = (\vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$
Énergie propre (de formation) : $W = \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0 AB}$
Champ électrique sur le dipôle :
- force résultante nulle : $\vec{F} = q\overrightarrow{E_0} - q\overrightarrow{E_0} = \vec{0}$
- couple de moment qui tend à aligner $\vec{P}$ sur $\vec{E}$: $\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}$ $\quad (\vec{\Gamma} \to 0)$

Pression électrostatique : $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\quad$ (car $\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}q\, \vec{E}$)

Capacité d'un condensateur : $C = \frac{Q}{U}$ $\quad (U = \Delta V)$ $\quad$ avec $V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}$
Condensateur plan : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$
Association de C : $\quad$ série : $C = \sum_k \frac{1}{C_k}$ $\quad$ / $\quad$ // : $C = \sum_k C_k$
$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$ $\quad$ (car $\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \frac{q\mathrm{d}q}{C}$)

4.2 Magnétostatique

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$ $\quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$

Jauge de Coulomb : $\operatorname{div}\vec{A} = 0$
$\Rightarrow$ éq de Laplace : $\vec{\Delta}\vec{A} + \mu_0\vec{J} = \vec{0}$

Potentiel vecteur : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(P)}{\|\overrightarrow{PM}\|}\mathrm{d}\tau$ $\quad$ diverge lorsqu'il y a des courants à l'infini
Circuit filiforme ($\vec{J}\mathrm{d}\tau \to I\overrightarrow{\mathrm{d}l}$) : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$

Si $\vec{B}$ est uniforme : $\vec{A}(M) = \frac{\vec{B}\wedge\overrightarrow{OM}}{2}$
Calculer $\vec{A}$ avec $\iint_\Sigma \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oint \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sur $(r \to r+\mathrm{d}r)\times h$

$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(P)\wedge\vec{u}}{r^2}\mathrm{d}\tau$
filiforme : relation de Biot et Savart : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}\wedge\vec{u}}{r^2}$
$\vec{B}_e - \vec{B}_i = \mu_0\vec{J}_S \wedge \vec{n}_e$
Perpendiculaire au plans de sym, / aux plans d'antisym

Pour les $\int$ poser : $\frac{z}{x} = \tan\alpha$
Utiliser des syst équivalents pour les conducteurs (images magnétiques)
DL de $\vec{B}$: parité, div $\vec{B} = 0$ (calculer le flux de $\vec{B}$) et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{J} = 0$

Trièdre direct : $\vec{B}, \vec{I}, \overrightarrow{AM}$ règle de la main droite
Théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0\iint_\Sigma \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mu_0 I$
div $\vec{B} = 0 \Rightarrow$ flux conservatif
Fil rectiligne infini : $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Segment : $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_B - \sin\alpha_A)$
Spire de courant : $B = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha$ (pt d'inflexion à $\pm\frac{R}{2}$)
Solénoide : $B = \frac{\mu_0 IN}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$ infini : $B = \mu_0 IN$
Ruban : $B = \frac{\mu_0 J_S}{\pi D}\sin\alpha$
Plan infini : $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\vec{J}_S \wedge \vec{n}$

En rotation : $\mathrm{d}I = \mathrm{d}q\frac{\omega}{2\pi}$

Dipôles magnétiques :
Moment magnétique : $\vec{\mathcal{M}} = \iint_\Sigma I\,\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\sum_i \vec{r}_i \wedge (q_i\vec{v}_i)$
$\mathrm{d}\vec{\mathcal{M}} = \frac{\overrightarrow{OP}\wedge\vec{J}\mathrm{d}\tau}{2} = \frac{\overrightarrow{OP}\wedge I\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{2}$ démo : $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{\mathrm{d}OP}$
$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{r}}{r^3}$ (avec la formule de Kelvin)
$\vec{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{r}}{r^3})$ $\vec{B} = \left(\frac{2\mu_0\mathcal{M}\cos\theta}{4\pi r^3}, \frac{\mu_0\mathcal{M}\sin\theta}{4\pi r^3}\right)_{\mathrm{cyl}}$ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5}[3(\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{\mathcal{M}}r^2]$
$\mathcal{E}_p = U_{\mathrm{L}} = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}$ force : $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U_{\mathrm{L}} = (\vec{\mathcal{M}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$
Moment sur le dipôle : $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$

Force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$ $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{J}\cdot\vec{E}$
Éq locale de Poynting : $\frac{\partial W\mathrm{em}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$ W_{em} : densité volumq d'énergie magnétq $\vec{\Pi}$: vecteur de Poynting
$W_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B}$ avec $\mathrm{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$
$\mathcal{P} = \iint \vec{\Pi}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

Penser à : $\vec{J} = \gamma\vec{E}$

Énergie magnétique : $W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\iiint \vec{J}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \dots$

Force de Laplace : $\overrightarrow{\mathrm{d}f} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,\mathrm{d}\tau = I\overrightarrow{\mathrm{d}l}\wedge\vec{B}$ att : orientation de $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$
2 circuits : $\overrightarrow{F_{1\to2}} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{(\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2})\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}$
2 fils infinis / : $\overrightarrow{f_{1\to2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi R}I_1 I_2\,\vec{e}_r$
déf de l'Ampère : lorsque $R = 1$ m et $I_1 = I_2 = 1$ A, $\overrightarrow{f_{1\to2}} = 10^{-7}$ N $\Rightarrow \mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ SI

Pression magnétostatique : $P_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\mu_0 J_S^2$
démo : $\vec{B}_2'' - \vec{B}_1'' = \mu_0\vec{J}_S\wedge\vec{n}$, $\vec{B}_2'' = -\vec{B}_1''$, $\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_2''$, $\vec{0} = \vec{B}' + \vec{B}_1''$, $\vec{B}' = \frac{1}{2}\mu_0\vec{J}_S\wedge\vec{n}$

Travail des forces de Laplace : $W_{\mathrm{L}} = I\phi_{\mathrm{C}} = I\iint \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ ϕ_{C} : flux coupé $\mathrm{d}\phi_{\mathrm{C}} = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = (\overrightarrow{\mathrm{d}r}\wedge\overrightarrow{\mathrm{d}l})$
Théorème de Maxwell : $W_{\mathrm{L}} = I(\phi_2 - \phi_1)$ démo : div $\vec{B} = 0$ att : orientation de la normale
Énergie potentielle : $U_{\mathrm{L}} = -I\phi$ volumique : $U_{\mathrm{L}} = -\iiint \vec{J}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$
$\mathrm{d}W_{\mathrm{L}} = -\mathrm{d}U_{\mathrm{L}}$ $U_{\mathrm{L}} = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}$ $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}}\wedge\vec{B}$
$F_{\mathrm{x}} = \frac{\partial W}{\partial x} = I\frac{\partial\phi}{\partial x}$ $\Gamma = \frac{\partial W}{\partial\theta} = I\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$
Coef d'inductance mutuelle M : $\phi_{1\to2} = MI_1$ $U_{\mathrm{L}} = -MI_1I_2$ $M = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2}}{r_{12}}$

Force électromotrice : $e = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$
C fixe dans $\vec{B}$ variable (induction de Neumann) : loi de Lenz : $e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ démo : MF
C mobile dans $\vec{B}$ uniforme (induction de Lorentz) : $e = -\frac{\mathrm{d}\phi_C}{\mathrm{d}t}$
Cas général : champ électromoteur : $\vec{E}_\mathrm{m} = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $e = \oint \vec{E}_\mathrm{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$
Coefficient d'autoinductance : $\phi_\mathrm{p} = LI$ circuit infini, etc : L avec $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 \mathrm{d}\tau$
Pr un circuit filiforme : $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\phi I$ $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \phi_{j\to i}$
Deux circuits couplés : $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ $-1 < k < 1$ démo : $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\phi_1 I_1 + \frac{1}{2}\phi_2 I_2 \geq 0$

Couplage électromécanique : 1 éq électrique ($U = RI$) + 1 éq mécanique (TRC, TMC)
éq méca avec la puiss : $J\dot{\omega} \times \omega = P_c = -ei$
Quantité d'électricité induite : $q_\mathrm{ind} = -\frac{1}{R}(\phi_2 - \phi_1)$

5 Atomistique

Énergie d'un photon : $w = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
Longueur d'onde : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ quantité de mvt : $p = \frac{h\nu}{c}$

Force exercée sur l'e⁻ : $F = ma = m\frac{v^2}{r} \to \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$
Condition de quantification (sur le moment cinétique) : $L = mvr = n\hbar$
Rayon de l'orbite n : $r = n^2\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 r_0$ rayon de Bohr : $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11}$ m
Relation de Rydberg : $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mathrm{R_y}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$
$\mathrm{R_y} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \approx 1.1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^{-1}$
$E_0 = hc\mathrm{R_y} \approx 13.6$ eV

Règle de Slater : énergie de l'électron : $E = \frac{(z-\sum\sigma)^2}{n^2}E_0 = -13.6\left(\frac{Z_\mathrm{eff}}{n}\right)^2$ eV
rayon de l'orbitale : $r = \frac{n^2}{Z_\mathrm{eff}}a_0$ $a_0 \approx 53$pm
$$\sigma_{21} \approx \begin{cases} 0 \text{ si } n_2 > n_1 \\ 0.35 \text{ si } n_2 = n_1 \\ 0.85 \text{ si } n_2 = n_1 - 1 \\ 1 \text{ si } n_2 \ll n_1 \end{cases}$$
Principe d'incertitude d'Heisenberg : $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$
Équation de Schrödinger : $\mathcal{H}\Psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \mathcal{E}_p\Psi = \mathcal{E}_m\Psi$ ($\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ avec $x \leftrightarrow \cdot x$ et $p_x \leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\cdot}{\partial x}$)
Quantité d'énergie (probabilité de présence) : $E = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$

n : nb quantique principal l : nb quantique orbital m : nb quantique magnétique
Énergie : $E = \frac{E_0}{n^2}$ moment cinétique : $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$
$n \geq 1$ $0 \leq l < n$ $-l \leq m \leq l$ spin des e⁻ : $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$
Couche : suivant l : S P D F (ex : $n = 3$, $l = 1$: couche 3p)
Remplissage suivant les niveaux d'énergie : règle de Klechkowski

e⁻ de valence : e⁻ de n max + couches incomplètes
2 premières exceptions : Cr ($Z = 24, \ldots 4s^1 3d^5$) Cu ($Z = 29, \ldots 4s^1 3d^{10}$)

6 Chimie

H							He
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightleftharpoons c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$
Loi d'action de masse : $\frac{a_\mathrm{C}^c a_\mathrm{D}^d}{a_\mathrm{A}^a a_\mathrm{B}^b} = K_T^0$
Activité : solide : 1, gaz : pression partielle en bars, liquide : concentration

Air $\approx \frac{4}{5}N_2 + \frac{1}{5}O_2$ ne pas oublier les gaz inertes ds les bilans

Conductivité : $\gamma = \gamma_+ + \gamma_- = (\alpha a_0)\mathcal{F}xp(k_+ + k_-)$
(avec α : taux de dissociation, x : coefficient stœchiométrique, p : charge, $k_\pm$: mobilité)
Conductivité équivalente : $\Lambda_\infty = \mathcal{F}k$

Conductance : $\sigma = k\gamma \approx \gamma\frac{S}{l} \sim \frac{1}{R}$
$\gamma = \sum \lambda_i c_i$ $\lambda_i \approx \lambda_{0i}$: conductivité molaire ($\Omega^{-1}\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{mol}^{-1}$) 1 S = 1 Ω^{-1}

Densité : $d = \frac{\rho}{\rho_{\text{air}}} = \frac{M}{M_{\text{air}}} \approx \frac{M}{29}$ (avec M en $\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$)
Volume molaire partiel : $v_i = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j\neq i}}$

Mésomères (plusieurs struct de Lewis) :
– règle de l'octet (8 e^- max sur la couche périph)
– charges formelles minimales
Insaturation : $\frac{1}{2}(2n_{IV} + n_{III} - n_I + 2 + z)$
AX_nE_p (n doublets liants, p doublets non liants) → linéaire, coudée, tétrahèdrique, bipyramidal

À l'équivalence : $\frac{[A]}{a} = \frac{[B]}{b}$

$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$ produit ionique : $K = \frac{[\mathrm{C}]^c[\mathrm{D}]^d}{[\mathrm{A}]^a[\mathrm{B}]^b}$
ex : $AgCl \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$
Produit ionique (= cste d'équilibre de la réaction) : $PI = [Ag^+][Cl^-]$
Si précipité en solution : $PI = K_s$, sinon : $PI < K_s$
Solubilité : $s = -\log K_s$

6.1 Cristallographie

cubique	p		i	f
quadratique	p		i	
hexagonal				
orthorombique	p	c	i	f
monoclinique	p	c		
rombohèdrique				
triclinique				

p : primitif c : 2 faces centrées i : centré f : faces centrées
Cristaux : métallique ionique covalent moléculaire
Coordinance : nb de voisins (12 max)
Compacité (τ ou C) : $\tau = \frac{\text{vol occupé par les atomes}}{\text{vol de la maille}}$
$V = (a \times b)c$ $\rho = \frac{MZ}{VN_a}$

Hexagonal compact : $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\tau = 0.74$ $c = 12$
Cubique à faces centrées : $l = a\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\tau = 0.74$ $c = 12$
Cubique centré : $\tau = 0.68$

Sites : tétrahèdriques, octahèdriques
$2r_- \leq a = k(r_+ + r_-)$

Structures :
– silicium et diamant : cfc + 1 site T sur 2 occupé
– graphite : plans d'hexagones (2^{e} décalé)
– CsCl : Cl^- cubique simple, Cs^+ au centre du cube
– NaCl : Cl^- cfc, Na^+ ds ts les sites O (ou vice versa)
– blende (ZnS) : S^{2-} cfc, Zn^{2+} ds 1 site T sur 2
– fluorine (CaF_2) : Ca^{2+} cfc, F^- ds ts les sites T

6.2 Cinétique chimique

$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$
Degré d'avancement du réacteur : $\mathrm{d}\eta = -\frac{\mathrm{d}n_A}{a} = \frac{\mathrm{d}n_C}{c}$
Vitesse de réaction : $R = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}$
Vitesse spécifique : $r = \frac{R}{V}$
Si V = cst, $r = -\frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t}\right)_R$
$\dot{\eta} = k \cdot f([\mathrm{A}], [\mathrm{B}], \ldots)$ k : cste de vitesse
Relation d'Arrhénius : $k_{(T)} = A\mathrm{e}^{\frac{-E_a}{RT}}$ avec E_a : énergie d'activation ($\mathrm{J \cdot mol^{-1}}$) et A : facteur de préexponentiel
Réaction ordonnée : $r = k[\mathrm{A}]^{\alpha_\mathrm{A}}[\mathrm{B}]^{\alpha_\mathrm{B}}$ avec α_A : ordre partiel, $\alpha_\mathrm{A} + \alpha_\mathrm{B}$: ordre total

Si $\alpha_A = a$ et $\alpha_B = b$, la réaction suit la règle de Vant'hoff (réaction élémentaire)
Souvent : $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha[B]^\beta$

AEQS (principe de Bodenstein) : $\frac{d[X^\cdot]}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \; [X^\cdot] = \ldots$
Faire un bilan de matière
Réaction rapide : équilibre atteint : $K = \frac{k_1}{k_{-1}}$

Mesure de l'ordre total :
– on se met ds les proportions stoech → $r = k'[A]^{\alpha_A+\alpha_B}$
– dégénerescence de l'ordre : [B] ≈ cst avec [B] ≫ [A], très concentré

Ordre	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
Évolution	[R]	$\sqrt{[R]}$	ln[R]	$\frac{1}{[R]}$	$\frac{1}{[R]^2}$

6.3 Réaction acide-base

$Ke = [H_3O^+][HO^-] = 10^{-14}$ à 25 ^{o} C
$Ka = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} \qquad pKa = -\log Ka$
$Kb = \frac{Ke}{Ka}$

Équations : conservation, équilibre, (électroneutralité,) zéro protonique
Monocaide : $[AH] = a_0 \frac{h}{h+Ka}$
Diacide : $[AH_2] = a_0 \frac{h^2}{h^2+h\cdot Ka_1+Ka_1\cdot Ka_2}$
Acide fort : $pH \approx -\log a_0$ / faible : $h \approx \frac{Ke}{h} + \frac{a_0\cdot Ka}{h+Ka}$
Prédominance : $pH < pKa - 1$ / $pH > pKa + 1$

6.4 Oxydo-réduction

$\mathcal{F} = 96500\,\mathrm{C}$

Nombre d'oxydation : Σ n.o. = charge de la molécule, O : −II (péroxydes -O-O- : −I par O), H : +I (hydrures : −I)
Oxydant : capte des électrons (grand n.o., grand E^0)

$14H^+ + Cr_2O_7^{2-} + 6e^- \rightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$
+VI → +III ; équilibrage : Cr^{3+}, e^-, H^+, H_2O

$dU = TdS - PdV + \phi dq$
Potentiel électrochimique : $\overline{\mu}_i = \mu_i + \phi z\mathcal{F}$
Affinité électrochimique : $\overline{\mathcal{A}} = -\sum \nu_i\overline{\mu}_i \qquad$ équilibre : $\overline{\mathcal{A}} = 0$
$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_{e^-(2)}-\mu_{e^-(1)}}{\mathcal{F}}$

Électrodes :
– 1^{re} espèce : Ag / Ag^+
– 2^e espèce : Hg / Hg_2Cl_2 / K^+, Cl^- (au calomel : ECS : $E^0 = 241$ mV)
– 3^e espèce : Pt / Fe^{2+} / Fe^{3+}

Piles : ⊖ Pt | Ox_1, Red_1 : Ox_2, Red_2 | Pt ⊕

$E^0(Ox/Réd) = K^0(Ox/Réd) - K^0(H_3O^+/H_2) \qquad$ convention : $E^0(H_3O^+/H_2) = 0$
$\delta W_{élec} = \Delta E\, dq \qquad dG_{T,P} = -E dq$

$\alpha Ox + ne^- \rightarrow \beta Réd$
Relation de Nernst :
$E = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln\left(\frac{a_{Ox}^\alpha}{a_{Réd}^\beta}\right)$
$E = E^0 + \frac{0.059}{n} \log\left(\frac{a_{Ox}^\alpha}{a_{Réd}^\beta}\right) \qquad \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \approx 0.059$
$\Delta_r\tilde{g} = -n\mathcal{F}E \qquad \Delta_r\tilde{g}^0 = -n\mathcal{F}E^0 \qquad \Delta_r G^0 = \Delta_r(\Delta_r\tilde{g}_i^0)$

$\Delta_r S^0 = -\frac{d\Delta_r G^0}{dT} = n\mathcal{F}\frac{dE^0}{dT} \qquad \Delta_r H^0 = \Delta_r G^0 + T\Delta_r S^0$ ou avec : $-\frac{\Delta_r H^0}{T^2} = \frac{d}{dT}(\frac{\Delta_r G^0}{T})$
Coefficient de température : $\frac{dE^0}{dT}$

$n_1\mathrm{Red}_2 + n_2\mathrm{Ox}_1 \rightleftharpoons n_1\mathrm{Ox}_2 + n_2\mathrm{Red}_1$
$\mathrm{d}q = n_1 n_2 \mathcal{F}\,\mathrm{d}\xi \qquad \Delta_r G = -n_1 n_2 \mathcal{F}\,\Delta E$

$\Delta_r G^0 = \Delta_r(\Delta_r \tilde{g}_i^0) = -RT \ln K_T^0$
Énergie récupérable : $\mathcal{T} = \Delta_r G^0$

Oxydation anodique (⊖) / réduction cathodique (⊕)
Référence : $E^0_{H^+/H_2} = 0 \qquad E^0(H_2O/H_2) = 1.23\,\mathrm{V}$
Tous les couples d'une même solution sont, à l'équilibre, au même potentiel
"Chasles" avec les E^0 : $6E^0(\mathrm{v/\text{-}i}) = 5E^0(\mathrm{v/o}) + E^0(\mathrm{o/\text{-}i})$ (linéarité des $\Delta_r\tilde{g}^0$)

Pile ≈ générateur de tension
Fém : $E = E_+ - E_- = E_+^0 - E_-^0 - \frac{0.06}{n}\log Q \qquad$ où $Q = \prod a_i^{\nu_i}$

Pile à l'équilibre : $\Delta E = 0$
Cste d'équilibre : $\Delta_r G^0 + RT\ln K_T^0 = 0$ donc $E^0 = \frac{0.06}{n}\log K_T^0$

$pH = -\log[H_3O^+]$
Diagrammes E / pH : $E = E^0 - 0.06\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{n}}pH + \frac{0.06}{n}\log\frac{a_{\mathrm{Ox}}^{\alpha}}{a_{\mathrm{Réd}}^{\beta}}$
convention 1 : m̂ [c] convention 2 : équi-répartition att : ex : $c_0 = [Cl^-] + 2[Cl_2]$

- immunité : H_2O n'oxyde pas le métal
- corrosion : métal oxydé par H_2O
- passivation : le métal est protégé par un oxyde ou un hydroxyde

Dismutation : ex : $X_{\mathrm{II}} \to X_{\mathrm{I}} + X_{\mathrm{III}}$ → stabilité avec K_T^0
Diagrammes E / pH : il ne peut y avoir de domaines disjoints

Électrolyse : $U \geq U_{\min} = \frac{\Delta_r G}{n\mathcal{F}}$

6.5 Diagrammes binaires

On représente : à P fixée : $T = f_l(x_i^l)$ et $T = f_g(x_i^g)$ à T fixée...

Variance : $v = 4 - \varphi$
Mélange parfait de gp : loi de Raoult : $P_i = x_i^l P_A^{\mathrm{sat}}(T)$
Coeff d'activité :
- réf corps pur ($x \to 1$) : $P = \gamma x P^{\mathrm{sat}}$ (loi de Raoult)
- réf soluté infiniment dillué ($x \to 0$) : $P = \gamma x k$ (k : cste d'Henry)

Courbe d'ébullition :
- iso-T : $P = P_B^{\mathrm{sat}}(T) + x_A^l[P_A^{\mathrm{sat}}(T) - P_B^{\mathrm{sat}}(T)]$: droite loi de Raoult → $P = x_A^l P_A^{\mathrm{sat}}(T) + x_B^l P_B^{\mathrm{sat}}(T)$
- iso-P : avec Clapeyron (hyp : g.p., $v_l \ll v_g$, $L(T) = \mathrm{cst}$) : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{LP}{RT^2} \to P = \ldots \to T = \ldots$

Courbe de rosée :
- iso-T : $P_A = x_A^l P_A^{\mathrm{sat}}(T) = x_A^g P \Rightarrow x_A^l \to$ ds la 1re éq
- iso-P : idem : $x_A^g = x_A^l \frac{P_A^{\mathrm{sat}}(T)}{P}$

Point homoazéotropique (Z) : $T_{\text{éb}} = T_{\text{ros}}$ et $P_{\text{éb}} = P_{\text{ros}}$
Th de Gibbs-Konovalov : $(s_g - s_l)\,\mathrm{d}T - (v_g - v_l)\,\mathrm{d}P = -(x_A^g - x_A^l)(\mathrm{d}\mu_A - \mathrm{d}\mu_B)$
démo : Gibbs-Duhem ($\sum n_i \mathrm{d}\mu_i = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P$) et, à l'équilibre, $\mu_X^l = \mu_X^g$
donc pt Z : $T^g = T^l \qquad P^g = P^l \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{s_g - s_l}{v_g - vl}$

Th des moments chimiques : $(x - x^l)n^l + (x - x^g)n^g = 0$

Deux liquides non miscibles : pt hétéroazéotropique
Courbe de rosée : avec $\mu_A^l = \mu_{A,l}^*(T,P)$ (du corps pur)
démo : $\mu_{A,g}^0(T) + RT_A^{\text{éb}}\ln(\frac{P_{\mathrm{tot}}}{P^0}) = \mu_{A,l}^*(T,P) = \mu_{A,g}^0(T) + RT\ln(\frac{x_A^g P_{\mathrm{tot}}}{P^0})$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\mu_{A,g}^0(T) - \mu_{A,l}^*(T,P)}{T}\right) = -R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln x_A^g)$; puis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\frac{\mu}{T}) = -\frac{h}{T^2}$ où $h_{A,g}^0 - h_{A,l}^* = L_A^{\mathrm{vap}}$

7 Thermodynamique

Gaz parf : 22.4 L à $T = 273$ K et $P = 1$ atm

$T = 273,16 \times \lim_{P\to 0} \frac{PV}{(PV)_{\text{point triple de l'eau}}}$
$t = T - 273,15$
$E = k_B T \qquad k_B = \frac{R}{N}$
Échelle affine centésimale : $\theta(t) = 100\frac{g-g_0}{g_{100}-g_0}$
Diagramme d'Amagat : PV / P

Pression : 1 bar = 10^5 Pa   760 mm de Hg = 1 atm = 101325 Pa   unité SI : Pa
$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P\, \mathrm{d}\tau = P\, \overrightarrow{\mathrm{d}S}$
$P = -\rho g z + P_0 \qquad \Delta P = \rho g h$
Souvent : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$
relation de la statique des fluides : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho g z) = \vec{0}$ en dim 1 : $\mathrm{d}P = -\rho g\, \mathrm{d}z$ d'où $P = P_0\, \mathrm{e}^{-\frac{Mz}{RT}}$
Poussée d'Archimède : $\Pi_A = -\rho v g = -P_{\text{fluide déplacé}}$

Gaz parfaits :
On néglige les interactions entre les molécules (P doit être faible : $\ll 1$ atm) et $V_{\text{molécules}} \ll V_{\text{tot}}$
Loi des gaz parfaits : $PV = nRT \qquad P = NkT \qquad R \approx 8.314\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$
Loi de Van Der Waals : $(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$
a : interaction entre molécules b : covolume, vol des particules

Coef de dilatation isobar : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \approx \frac{1}{T}$
Coef de variation de pression à vol cst : $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \approx \frac{1}{T}$
Coef de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \approx \frac{1}{P}$
$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$
$\alpha = \beta \chi_T P$

7.1 Premier principe

Énergie interne : $U = W_{c(\text{int})} + W_{p(\text{int})}$
Travail échangé par les forces pressantes : $\mathrm{d}W = P_{\text{ext}}\, \mathrm{d}\tau$
$\mathrm{d}W = -P_{\text{ext}}\, \mathrm{d}V$

C_p, C_v : capaciés calorifiques à P / V constant
Chaleur massique : $c_p = \frac{C_p}{M}$ chaleur molaire : $C_p = \frac{C_p}{n}$
$\mathrm{d}Q_{\text{rév}} = C_v\, \mathrm{d}T + l\, \mathrm{d}V$
$\mathrm{d}Q_{\text{rév}} = C_p\, \mathrm{d}T + h\, \mathrm{d}P$
$\mathrm{d}Q_{\text{rév}} = \lambda\, \mathrm{d}V + \mu\, \mathrm{d}P$
h : chaleur latente de variation de pression (m^3)   g p : $h = -V$
l : chaleur latente de variation de volume (Pa)   g p : $l = P$
λ : capacité calorifique (Pa)

1er principe de la thermo : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$

Enthalpie : $H = U + PV$
Loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parf ne dépend que de sa température ($\Delta U = 0$)
Loi de Joule-Thomson : pour un gaz qui subit une détente de Joule-Thomson, $\Delta T = 0$ (et $\Delta H = 0$)

$\Delta(H + \frac{1}{2}mv^2 + mgh) = W' + Q$ (W' : travail des forces autres que pressantes)

Transformations :
$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (monoatomique : $\gamma \approx \frac{5}{3}$ / diatomique $\gamma \approx \frac{7}{5} \approx 1.4$)
g. p. : $C_p - C_v = R \qquad \mathrm{d}U = C_v\, \mathrm{d}T \qquad \mathrm{d}H = C_p\, \mathrm{d}T \qquad C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$
Svt : $W = \int -P\, \mathrm{d}V = P_1 V_1 \cdot \ln\frac{V_1}{V_2} = nRT \cdot \ln\frac{P_2}{P_1}$
- isotherme : $\delta U = 0 \qquad \Delta H = 0 \qquad Q = -W$
- isobare : $W = P\, \Delta V \qquad \Delta U = C_v\, \Delta T \qquad Q_p = \Delta H = C_p\, \Delta T$
- isochore : $W = 0 \qquad Q_v = \Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$

Transfo adiabatique : le syst n'échange pas de chaleur ($\delta Q = 0$) (svt réversible)
Relations de Lapalce : $PV^\gamma = \text{cst}$ $TV^{\gamma-1} = \text{cst}$ $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cst}$ démo : $\delta Q = -\delta W + \mathrm{d}U = 0$

7.2 Second principe

S : entropie $\Delta S = \Delta S_{\text{échange}} + \Delta S_{\text{création}}$ $\mathrm{d}S \geq 0$ (rév / irrév) Transfo rév : $\Delta S = 0$
$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ ($\rightarrow \Delta S_{\text{éch}} = C_p \ln \frac{T_f}{T_i}$) (eau : $C_p = 4186 \ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$)
3e principe : à 0 K, $S = 0$
Machine thermique : $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$: inégalité de Claussius
Moteur : cyclique $\rightarrow \Delta S = 0$ et $\Delta U = 0$
Pour les machines thermiques (valable aussi pr les ∂) : $\sum_i Q_i + \sum_j W_j = 0$ et $\sum_i S_i = 0$ (si réversible)
Rendement : $\rho = \left|\frac{\text{travail fourni}}{\text{travail reçu}}\right|$
Moteur : $\rho = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ réfrigérateur : $\rho = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ pompe à chaleur : $\rho = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$
$S = \frac{nR}{\gamma-1}\ln(PV^\gamma) + \text{cst} = \frac{nR}{\gamma-1}\ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cst} = \frac{nR}{\gamma-1}\ln(P^{1-\gamma}T^\gamma) + \text{cst}$
$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V$
Diagramme entropique : T / S

Condition d'équilibre ($\Leftarrow \mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \delta_i S$ avec $\delta_i S \geq 0$) :

syst isolé ($\delta Q = 0$)	$\rightarrow$	$-S$ décroît jusqu'à un minimum
S et V fixés	$\rightarrow$	U
S et P fixés	$\rightarrow$	H
T et U fixés	$\rightarrow$	F
T et P fixés	$\rightarrow$	G

$F^* = U - T_{\text{ext}}S$ $G^* = U - T_{\text{ext}}S + P_{\text{ext}}V$ (exergie) (partir de U)
$W_{\text{f}} \leq -\Delta F^*$ (pr une transfo monotherme) $W_{\text{f, u}} \leq -\Delta G^*$ (pr une transfo monotherme monobare)

$$\mathcal{P}_{\text{utile}} + \mathcal{P}_{\text{thermq}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E + P_{\text{ext}} + V) + \Big[(h + e_c + e_p)q_m\Big]_e^s$$

7.3 Application différentielle des deux principes

$H = U + PV$ $F = U - TS$ $G = H - TS$
$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$ $\mathrm{d}H = V\mathrm{d}P + T\mathrm{d}S$ $\mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T$ $\mathrm{d}G = V\mathrm{d}P - S\,\mathrm{d}T$

Relations de Clapeyron : $l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ $h = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ (grâce à $\mathrm{d}U / \mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}H / \mathrm{d}S$ et Schwartz)
$C_p - C_v = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = T\alpha V\beta P$

Relation de Gibbs-Helmholtz :
$-\frac{H}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{G}{T}\right)\right)_P$ car $H = G + TS = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$
$-\frac{U}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_V$ car $U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$

7.4 Changement d'état

Point critique : $L \xrightarrow[T \to T_c]{} 0$

Changement d'état : $Q_p = \Delta H = mL$ $L_{1\to2} = h_2 - h_1$
Formule de Clapeyron : $L_{1\to2} = T(u_2 - u_1)\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ (où u : vol massique)
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{\alpha\to\beta}}{T(u_\beta - u_\alpha)}$ démo : $\mu_\alpha = \mu_\beta$ donc $\mathrm{d}\mu_\alpha = \mathrm{d}\mu_\beta$ donc $v\mathrm{d}P - s\mathrm{d}T$ donc $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}P} = \frac{v_\beta - v_\alpha}{s_\beta - s_\alpha}$ et $S = \frac{L}{T}$
$\Delta H_{\text{cycle}} = L_F + L_V - L_S = 0$
$u = x\,u_v + (1-x)\,u_l$ avec $x = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m} = \frac{LM}{LV}$ (idem pour h et s)

$P^{\text{sat}}(T) = P^{\text{sat}}(T_0)\exp\left[-\frac{L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$ démo : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} \approx \frac{L}{Tv_g} = \frac{LP}{RT^2}$

Diagramme de phases : P / T diagramme d'Andrews : P / v

Formule de Duperray (pr l'eau) : $P_{(\text{atm})} = \left(\frac{t_{(^\circ\mathrm{C})}}{100}\right)^4$ (pr $50 < t < 200\,^\circ$C)

	ébullition	100 °C	1 atm
Eau :	τ	0, 01 °C	4 mm Hg=$\frac{4}{760}$ atm
	C	374 K	218 atm

Machines : régime permanent : $\Delta H = 0 = \sum_i m_i h_i$

7.5 Théorie cinétique des gaz

Hyp :
– $U = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$
– homogénéité : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{cst}$
– isotropie de l'espace

Cste de Bolzmann : $k_B = \frac{R}{N} \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Nb de particules tq : $v_x < v < v_x + dv, v_y \ldots$: $\mathrm{d}^3 n = N(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}} \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z$ (on a : $\mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z = 4\pi v^2 \mathrm{d}v$)
Vitesse la plus probable : $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$
$\overline{u} = \frac{1}{N} \int_{v=0}^{\infty} v\ \mathrm{d}n_{(v)} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$
$I_n = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta v^2} v^n \mathrm{d}v$ $I_n = \frac{n-1}{2\beta} I_{n-2}$ $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi\beta}$ $I_1 = \frac{1}{2\beta}$
Vitesse quadratique moyenne : $\overline{u^2} = \frac{3m}{4kT}$
Méthode du viriel : dériver $\sum OM^2 = \mathrm{cst} \to \mathcal{E}_c = \sum \frac{1}{2} m v^2$
Chaque degré de liberté ajoute $\frac{1}{2} kT$ à l'énergie
Monoatomique : $U = \frac{3}{2} RT$ / $\gamma = \frac{5}{3}$ diatomique : $\gamma = \frac{7}{5}$ déformable : $\gamma = \frac{9}{7}$
Polyatomique : $\gamma = \frac{6a-3}{6a-5}$ déformable : $\gamma = \frac{3a-2}{3a-3}$
L'énergie est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-\frac{E}{kt}}$

7.6 Transferts thermiques

$E_{\mathrm{vib}} = (n + \frac{1}{2}) h\nu$ changemt de niv d'énerg : $\Delta n = \pm 1$

$\vec{q}$: vect densité de courant volumq d'énrg interne σ_u : terme de création d'énrg int par unité de vol
$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathrm{d}\mathcal{E}_c - \mathrm{d}\mathcal{E}_e$ échange : $\mathrm{d}\mathcal{E}_e = -(\oiint_{\mathrm{d}\Sigma} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma})\ \delta t$ création : $\mathrm{d}\mathcal{E}_u = \sigma_u\ \mathrm{d}\tau\ \delta t$
$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \iint \sigma_u\ \mathrm{d}\tau - \oiint_{\Sigma} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$

Rayonnement / conduction / convection (déplacemt de matière) : $\vec{q} = \vec{q}_{\mathrm{R}} + \vec{q}_{\mathrm{Cd}} + \vec{q}_{\mathrm{Cv}}$

$\vec{J}_{\mathrm{Th}} = \vec{q}_{\mathrm{Cd}} \approx \vec{q}$: vect densité volumq de courant d'énrg int, non convectif (conduction) $\mathcal{P}_{\mathrm{Th}} = -\oiint \vec{J}_{\mathrm{Th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$ (reçue)
u_m : énrg int massq ρ : masse volumq ($u_v = \rho u_m$)
Conservation locale de l'énrg : $\mathrm{div}\ \vec{J}_{\mathrm{Th}} + \frac{\partial(\rho u_m)}{\partial t} = \sigma_u$
$\mathrm{div}\ \vec{J}_{\mathrm{Th}} + \rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_u$ avec $\mathrm{d}u_m = c_m\ \mathrm{d}T$
pr une résistance : $\sigma_u = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\sigma}$

Loi de Fourier : $\vec{J}_{\mathrm{Th}} = -\lambda\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T$ λ : conductivité themique (en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)
Éq de la diffusion thermique : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T) + \sigma_u$
en milieu homogène ($\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \lambda \approx 0$) : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_m}$
$a = \frac{\lambda}{\rho c_m}$: diffusivité themique a en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$
Svt : $\sigma_u = 0$ (pas de création d'énergie)
En régime permanent, le flux thermique est constant $\Delta T = 0$

Résistance themique : $R = \frac{T_2 - T_1}{\mathcal{P}}$

Entropie : $\mathrm{d}S = s_v\ \mathrm{d}\tau = \rho s_m\ \mathrm{d}\tau$ $\delta_e S = -(\oiint_{\Sigma} \frac{\vec{J}_{\mathrm{Th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}}{T}) \delta t$
$\vec{J}_S$: densité de courant volumq d'entropie σ_S : création d'entropie
Éq de conservation locale de l'entropie : $\rho \frac{c_m}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{J}_S = \sigma_S$ avec : $\frac{\partial s_v}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{J}_S = \sigma_S$
Avec A entropie volumique : $\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}\ \vec{J}_S = A$ $A = \lambda(\frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T}{T})^2$
démo : $\mathrm{d}S = \frac{C_p\ \mathrm{d}T}{T}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\frac{1}{T}) = -\frac{1}{T^2}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T$ et la conservation locale de l'énergie

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ T$ et $\vec{J}_{\mathrm{Th}}$ st de sens contraire démo : $\sigma_S = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \frac{1}{T} \cdot \vec{J}_{\mathrm{Th}} \geq 0$

Convexion :
χ : grandeur scalaire extensive

$\vec{J}_\chi = \rho \chi_m \vec{v} \qquad \phi_\chi = \oiint \vec{J}_\chi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\Sigma}$

Continuité de T donc de $\vec{J}_{\mathrm{Th}}$ à l'interface

Loi de Newton : $\delta Q = -h(T - T_{\mathrm{ext}})\, \mathrm{d}\Sigma\, \delta t$

Rayonnement thermique :
ϕ : puiss totale rayonnée par la source (W)
$\varphi_{\vec{u}}$: fraction du flux surfacique émis ds l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ ds la direction $\vec{u}$ (en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{sr}^{-1}$)
$\mathrm{d}\phi = \varphi_{\vec{u}}\, \mathrm{d}\Sigma\, \mathrm{d}\Omega \qquad$ ici : $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\cos\theta\, \mathrm{d}S}{r^2}$

Émittance totale : $M = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma} \qquad$ flux surfacique : $\phi = \int_{\mathrm{surf}} M\, \mathrm{d}\Sigma$
Luminance totale : $\mathrm{d}\phi = L_{\vec{u}} \cos\theta\, \mathrm{d}\Sigma\, \mathrm{d}\Omega \qquad \theta$: angle fait avec la normale
Loi de Lambert : $L_{\vec{u}} = L = \mathrm{cst}$
$M = \pi L \qquad$ démo : $M = \iint L \cos\theta\, \mathrm{d}\Omega$
Luminance, émittance monochromatiques : $L_{\vec{u}} = \int_0^\infty L_{\vec{u},\lambda} \mathrm{d}\lambda \qquad M = \int_0^\infty M_\lambda \mathrm{d}\lambda$
Éclairement total (d'une surface) : $E = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma} \qquad \phi = \int_{\mathrm{surf}} E\, \mathrm{d}\Sigma$

Corps noir : idéal, émet le maximum d'énergie par rayonnement
Loi de Planck : $M_\lambda^0 = \frac{2\pi h c^2 \lambda^{-5}}{\exp\left[\frac{hc}{\lambda k T}\right] - 1}$
loi de Wien : $\lambda_{\max}(T) \cdot T = \mathrm{cst} \quad \approx 3 \cdot 10^{-3}\, \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$
Loi de Stephan : $M^0 = \sigma T^4 \qquad$ avec $\sigma = \frac{2\pi^5 h k^4}{c^2 h^4}$
Flux du Soleil sur la Terre : $\varphi_{S \to T} = \sigma T_S^4 (\frac{R_S}{D})^2 \pi R_T^2 \qquad$ démo : $\varphi = M \times \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \times S$ (supposé isotrope)

Émissivité : $\varepsilon_{\vec{u},\lambda} = \frac{L_{\vec{u},\lambda}}{L_\lambda^0}$
$L_{\vec{u},\lambda} = \varepsilon_{\vec{u},\lambda} L_\lambda^0 \qquad M_\lambda = \varepsilon_\lambda M_\lambda^0 \qquad M = \varepsilon M^0$
Corps gris : $\varepsilon_{\vec{u},\lambda} = \varepsilon_{\vec{u},\lambda_0}$
Corps à émission diffuse : $\varepsilon_{\vec{u},\lambda} = \varepsilon_{\vec{u}_0,\lambda}$ (suit la loi de Lambert)

Loi de Kirchhoff : à l'équibre thermodynamq, $\varepsilon_{\lambda,\vec{u}} = \alpha_{\lambda,\vec{u}}$ (coef d'absorption)

8 Thermochimie

$Q_p + Q_v = RT\, (\sum_i \nu_i)_{\mathrm{gaz}}$
Pour un corps simple : $H^0 = 0$
$\Delta H = \Delta U^0 + RT\, (\sum_i \nu_i)_{\mathrm{gaz}} = Q_p$
$\mathrm{d}Q_v = (\sum_i \nu_i C_{vi}) \mathrm{d}T \qquad (\to \Delta U^0)$
$\mathrm{d}Q_p = (\sum_i \nu_i C_{p_i}) \mathrm{d}T \qquad (\to \Delta H^0)$
$\frac{\mathrm{d}Q_p}{\mathrm{d}P} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}V} = 0$
Enthalpie de formation (énergie de la réaction à 25 °C) : $\Delta H = \sum_i \nu_i H_i^0 \qquad$ (ne dépend pas du chemin suivi)
$\Delta H^0 < 0$: exothermique

Énergie de liaison : $\Delta_r H^0$ de la réaction $(\mathrm{A} - \mathrm{B})_{\mathrm{g}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{g}} + \mathrm{B}_{\mathrm{g}}$

8.1 Thermodynamique chimique

Pression partielle : pression qu'aurait le gaz s'il était seul
Fraction molaire : $x_i = \frac{n_i}{n} = \frac{P_i}{P}$

$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}n$
Potentiel chimique : $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{S,V} = g = \frac{G}{n}$
$\mu = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial n}\right)_{T,P} \qquad \mathrm{d}\mu = v\, \mathrm{d}P - s\, \mathrm{d}T$
$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P = -s \qquad \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v \qquad \mu = h - Ts \qquad -\frac{h}{T^2} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right)_P \qquad$ (avec $\mu = g = h - Ts = h + T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P$)

gaz parf : $\mu = \mu^0(T) + RT \ln \frac{P}{P^0} \qquad$ avec $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v$
cas général : $\mu(T,P) = \mu^0(T) + RT \ln f(T,P) \qquad f$: fugacité $\qquad f(T,P) \underset{P \to 0}{\sim} P$
f : avec $\left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T = v \qquad \frac{V}{RT}\mathrm{d}P - \mathrm{d}(\ln P) = \mathrm{d}(\ln \frac{f}{P}) \qquad f(T,P) = P \exp\left[\int_0^P (\frac{V}{RT} - \frac{1}{P}) \mathrm{d}P\right]$

Plusieurs constituants :
$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,V,n_{j\neq i}}$ $\quad$ $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - P\,\mathrm{d}V + \sum \mu_i \mathrm{d}n_i$ $\quad$ $-T\,\delta_i S = \sum_i \mu_i\,\mathrm{d}n_i$
Théorème d'Euler : si $f(x,y,z)$ est homogène, de degré 1, en x, y, z alors $f(x,y,z) = x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} + z\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$
démo :dériver $\lambda f = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ par rapport à λ d'où, si $\lambda = 1$...
si Y extensive alors : $Y(T,P,n_i) = \sum n_i \left(\frac{\partial Y}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j\neq i}}$
$\Rightarrow G = \sum n_i \mu_i$

Équation de Gibbs-Duhem : $V\,\mathrm{d}P - S\,\mathrm{d}T = \sum n_i \mathrm{d}\mu_i$ $\quad$ démo : $\mathrm{d}G = P\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T + \sum \mu_i\,\mathrm{d}n_i = \mathrm{d}(\sum n_i\mu_i)$
à T et P fixés : $\sum x_i \mathrm{d}\mu_i = 0$ $\quad$ (permet de relier les μ_i) $\quad$ aussi : $\sum x_i = 1$

Cœxistence de deux phases (pr un corps pur) : $\mu_\alpha = \mu_\beta$ $\quad$ (si $\mu_\alpha < \mu_\beta$, seule α est stable)
Relation de Clausius-Clapeyron : $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{L_{\alpha\to\beta}}{T(v_\beta - v_\alpha)}$ $\quad$ (loin du pt critq : $v_l \ll v_g$)
Diagramme de phases : P / T $\quad$ isothermes d'Andews : P / v

Mélange parf de g p (loi de Dalton) : $P_i = x_i P_{\mathrm{tot}}$ $\quad$ $\mu_i = \mu_i^0(T, P^0) + RT \ln \frac{P_i}{P^0}$
Loi de Raoult (liq + gaz) : $P_i = x_i^{\mathrm{l}} P_i^{\mathrm{sat}}(T)$ $\quad$ alors : $\mu_i^{\mathrm{l}} = \mu_{i,\mathrm{p},x}^{0,\mathrm{l}}(T) + RT\ln x_i^{\mathrm{l}}$ $\quad$ avec : $\mu_{i,\mathrm{p},x}^{\mathrm{l}} = \mu_i^{\mathrm{g}}(T) + RT\ln x_i^{\mathrm{l}}$
Mélange binaire : A $\approx$ pur : suit la loi de Raoult $\quad$ B $\approx$ pur : A suit la loi d'Henry ($P_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{A}}^{\mathrm{l}} K_{h(B/A)}$)
Activité : $P_i = P_i^{\mathrm{sat}} a_i$ $\quad$ coeff d'activité : $a_i = \gamma_i x_i^{\mathrm{l}}$
$\mu_i^{\mathrm{l}} = \mu_i^{0,\mathrm{l}}(T) + RT\ln a_i^{\mathrm{l}}$
À dillution infinie (suit la loi d'Henry) : $\mu_A^{\mathrm{l}} = \mu_{\mathrm{A},\infty,x}^{0,\mathrm{l}}(T) + RT\ln x_A^{\mathrm{l}}$
Pr une concentration fixée : $\mu_{\mathrm{A}}^{\mathrm{l}} = \mu_{\mathrm{A},\infty,c}^{0,\mathrm{l}}(T) + RT\ln\frac{[\mathrm{A}]}{c_{\mathrm{réf}}}$

Avancement ξ : $n_i = n_i^0 + \nu_i \xi$
$\xi_{\max}$ et $\xi_{\min}$: avec $n_i \geq 0$
Opérateur de Lewis : $\Delta_{\mathrm{r}} Y = \sum \nu_i Y_i = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_{T,P}$ si Y fonction d'état extensive
Affinité chimique : $T\,\delta_{\mathrm{i}} S = \mathcal{A}\,\mathrm{d}\xi$ $\quad$ $\mathcal{A} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,P}$ $\quad$ $\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P - \mathcal{A}\mathrm{d}\xi$
$\mathcal{A} = -\sum \nu_i \mu_i = -\Delta_{\mathrm{r}} G$
Condition d'équilibre chimique : $\mathcal{A} = 0$
Constante d'équilibre : $K_T^0 = \prod (a_i^{\mathrm{éq}})^{\nu_i}$ $\quad$ $\Delta_{\mathrm{r}} G^0 = -RT\ln K_T^0$ (loi d'action de masse)
Avec l'activité a_i :
- liquide pur (solvant) / solide pur : $a_i = 1$
- gaz ($\approx$ parf) : $a_i = \overline{P_i} = \frac{P_i}{P_{\mathrm{réf}}}$ en bar (att avec les Pa !) $\quad$ $P_{\mathrm{réf}} = 1$ bar
- soluté : $a_i = \frac{[A_i]}{c_{\mathrm{réf}}}$ $\quad$ $c_{\mathrm{réf}} = 1$ mol / L $\quad$ $\mu_i = \mu_{i,\infty,c}^{0,\mathrm{l}}$

$\mathcal{A} = RT \sum \nu_i \ln \frac{a_i^{\mathrm{éq}}}{a_i}$
Évolution : $\mathcal{A}\,\mathrm{d}\xi \geq 0$ donc : $\mathcal{A} > 0 : \rightarrow$ $\quad$ $\mathcal{A} < 0 : \leftarrow$ $\quad$ $\mathcal{A} = 0$: éq
faire des bilans de matière (+ colonne $n_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{g}}$) $\quad$ att : gaz inertes $\quad$ 2 réaction $\sim$ successives
Quotient de réaction : $Q = \prod a_i^{\nu_i}$ $\quad$ $\mathcal{A} = RT\ln\frac{K_T^0}{Q}$
Relation de Van't Hoff : $\frac{\mathrm{d}\ln K_T^0}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_{\mathrm{r}} H^0}{RT^2}$
démo : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln K_T^0) = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{r}} G^0}{T}\right) = -\frac{1}{R}\sum_i \nu_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\mu_i^0}{T}\right)$ or $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\mu_i^0}{T}\right) = -\frac{h_i^0}{T^2}$ d'où $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln K_T^0) = \frac{\sum_i \nu_i h_i^0}{RT^2} = \frac{\Delta_{\mathrm{r}} H^0}{RT^2}$

$\Delta_{\mathrm{r}} G^0 = \Delta_{\mathrm{r}} H^0 - T\Delta_{\mathrm{r}} S^0$ $\quad$ approximation d'Ellingham : $\Delta_{\mathrm{r}} H^0$ et $\Delta_{\mathrm{r}} S^0$ indép de T
Relations de Kirchhoff : $\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{r}} H_T^0}{\mathrm{d}T} = \Delta_{\mathrm{r}} C_p^0$ $\quad$ $\frac{\mathrm{d}\Delta_{\mathrm{r}} S_T^0}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_{\mathrm{r}} C_p^0}{T}$
Relations de Gibbs-Helmholtz : $\Delta_{\mathrm{r}} S^0 = -\frac{\mathrm{d}(\Delta_{\mathrm{r}} G^0)}{\mathrm{d}T}$ $\quad$ $-\frac{\Delta_{\mathrm{r}} H^0}{T^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\Delta_{\mathrm{r}} G^0}{T}\right)$

Réaction de formation : produit 1 mol à $P^0 = 1$ bar et à T = cst
$\Delta_{\mathrm{f}} H_i^0 = \sum \nu_j h_j^0$ $\quad$ $h_i^0 = \Delta_{\mathrm{f}} H_i^0 - \sum_{\substack{\text{corps}\\\text{simple}}} \nu_j h_j^0$ $\quad$ loi de Hess : $\Delta_{\mathrm{r}} H^0 = \sum_i \nu_i \Delta_{\mathrm{f}} H^0$

Variance : $v = n - r + 2 - \varphi$ $\quad$ (n : nb d'espèces chimiques, r : nb de réactions, φ : nb de phases)
démo : $\sum_{i=1}^n x_i^\phi : \varphi$, $\mu_i^1 = \mu_i^2 = \ldots = \mu_i^\varphi : \varphi - 1$, $\mathcal{A} = 0 : r$
$c' = c - r$: nb de réaction chimqmt indép $\quad$ att : aux relations entre $P \Rightarrow v = v - 1$

Liq / gaz : $\mathcal{A} = RT\ln K_T^0 - RT(\sum \nu_i^{\mathrm{g}})\ln\left(\frac{P}{N_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{g}} P_{\mathrm{réf}}}\right) - RT\ln\prod_{\mathrm{gaz}}(n_i^{\mathrm{g}})^{\nu_i}$
Solutés / solides : $\mathcal{A} = RT\ln K_T^0 + RT(\sum_{\text{soluté}} \nu_i^{\text{soluté}})\ln(C_{\mathrm{réf}} V) - RT\ln\prod_{\text{soluté}} n_i^{\nu_i}$

Endo/exothermique : $\Delta_{\mathrm{r}} H^0 > 0$ ou < 0
$\Delta_{\mathrm{r}} H^0\,\mathrm{d}T\,\mathrm{d}\xi \geq 0$
Principe de Lechatelier : principe modération, le syst diminue les effets de la perturbation

Diagramme d'Elligham : $\frac{2x}{y}M + O_2 \rightarrow \frac{2}{y}\ M_xO_y$ (oxyde) $\Delta_r G^0 = RT \ln \overline{P_{O_2}^{\text{éq}}} = f(T)$ haut : + oxydants